目　　录

主　　编　单　塆

副 主 编　李善良　陈永高　王巧林

本册主编　樊亚东

编写人员　寇恒清　陈光立　祁建新　张乃达　樊亚东　陈永高

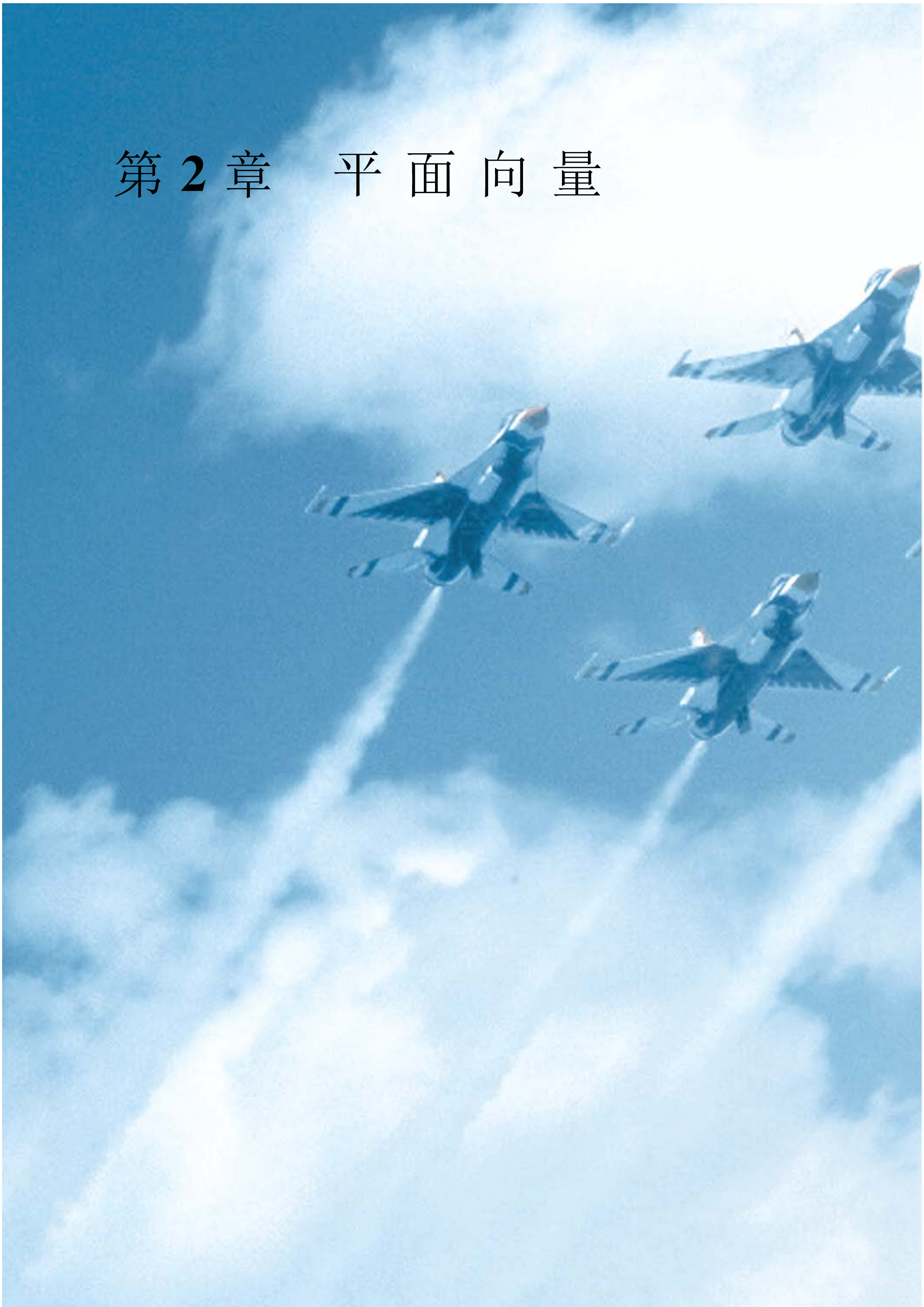
参与设计　徐稼红　葛福生　仇炳生　石志群　葛　军

责任编辑　蔡　立

第 1 章　三角函数

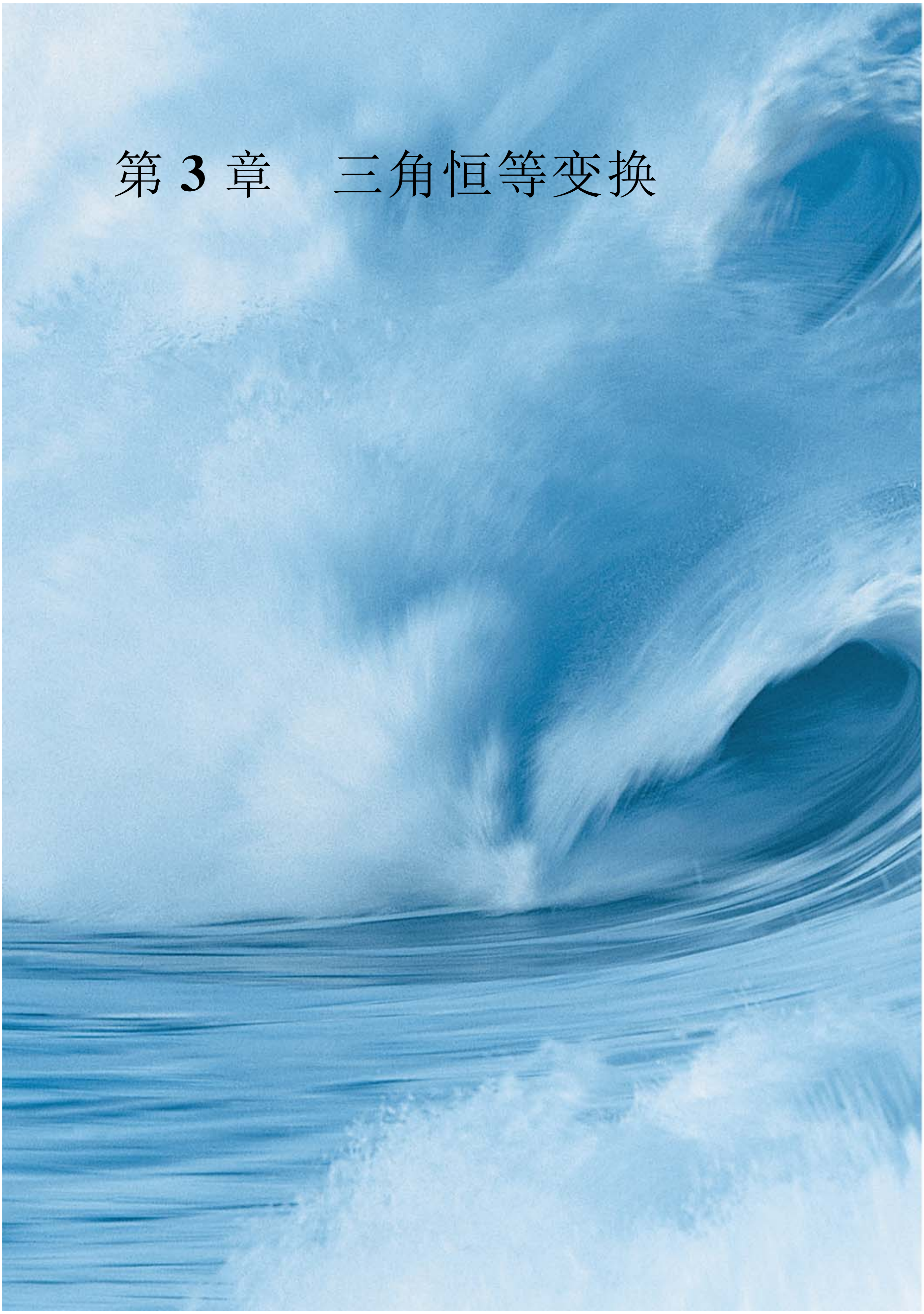
- 三角函数
  - 任意角、弧度
    - 任意角
    - 弧度制
  - 任意角的三角函数
    - 任意角的三角函数
    - 同角三角函数关系
    - 三角函数的诱导公式
  - 三角函数的图象和性质
    - 三角函数的周期性
    - 三角函数的图象与性质
    - 函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象
    - 三角函数的应用

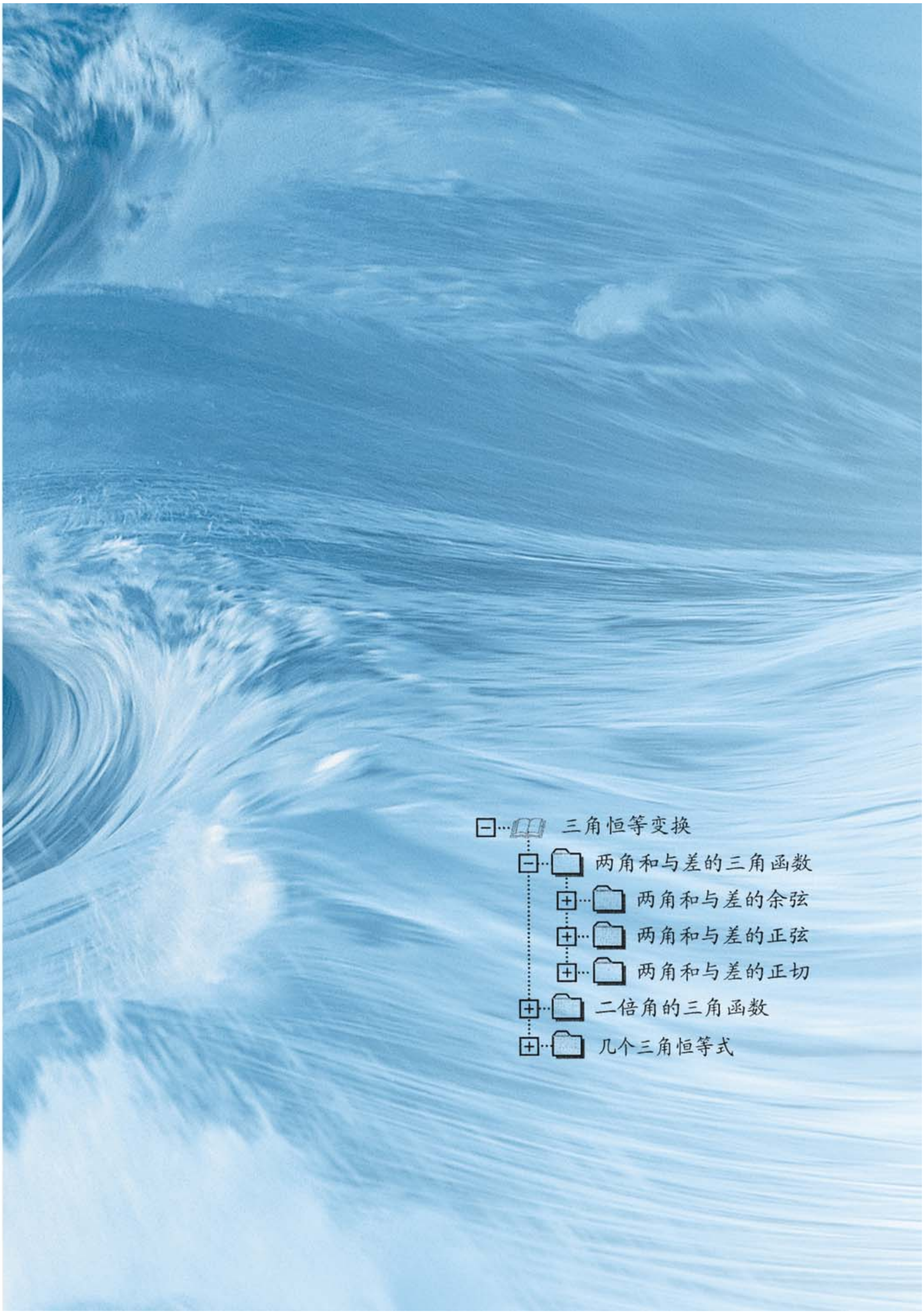
第 2 章　平面向量



- 平面向量
  - 向量的概念及表示
  - 向量的线性运算
    - 向量的加法
    - 向量的减法
    - 向量的数乘
  - 向量的坐标表示
    - 平面向量基本定理
    - 平面向量的坐标运算
  - 向量的数量积
  - 向量的应用

第 3 章　三角恒等变换





- 三角恒等变换
  - 两角和与差的三角函数
    - 两角和与差的余弦
    - 两角和与差的正弦
    - 两角和与差的正切
  - 二倍角的三角函数
  - 几个三角恒等式

本书部分常用符号

$\sin x$	x 的正弦
$\cos x$	x 的余弦
$\tan x$	x 的正切
$\boldsymbol{a}$	向量 $\boldsymbol{a}$
$\overrightarrow{AB}$	向量$\overrightarrow{AB}$
$\|\boldsymbol{a}\|$	向量 $\boldsymbol{a}$ 的模（或长度）
$\|\overrightarrow{AB}\|$	向量$\overrightarrow{AB}$的模（或长度）
$\mathbf{0}$	零向量
$\boldsymbol{e}$	单位向量
$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$	平面直角坐标系中 x，y 轴方向的单位向量
$\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 平行（共线）
$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 垂直
$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和
$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差
$\lambda\boldsymbol{a}$	实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积

Trigonometry contains the science of continually undulating magnitude . . . .

— Augustus De Morgan

日出日落，寒来暑往……自然界中有许多“按一定规律周而复始”的现象，这种按一定规律不断重复出现的现象称为周期现象. 这种现象一般与周期运动有关. 一个简单又基本的例子便是“圆周上一点的运动”.

如图 1，P 是半径为 r 的圆 O 上一点，点 P 的运动可以形象地描述为“周而复始”. 那么，点 P 按怎样的规律不断重复出现？用什么样的数学模型来刻画呢？

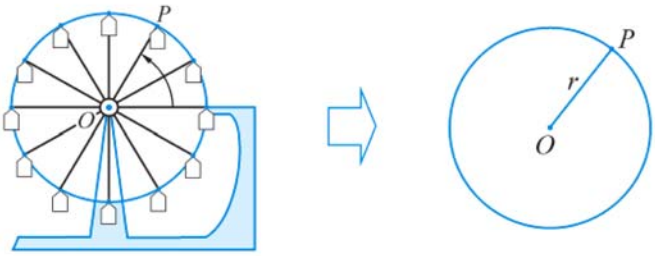


图 1

为了回答上述问题，需要将点 P 表示出来. 我们进行如下思考：

(1) 如图 2 和图 3，以水平方向作参照方向，有序数对 (r, α)，(r, l) 都可以表示点 P；

(2) 如图 4，以水平线为 x 轴，圆心 O 为坐标原点建立直角坐标系，有序数对 (x, y) 也可以表示点 P.

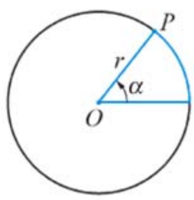


图 2

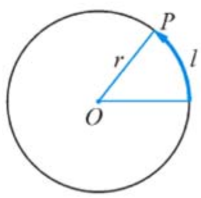


图 3

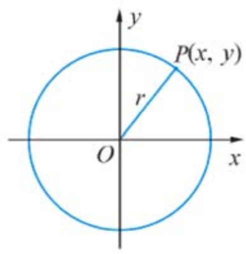


图 4

在表示点 P 的过程中，我们先后选用了角、弧长和直角坐标.

● α，l，x，y 之间有着怎样的内在联系呢？

1.1 任意角、弧度

我们已经学习过一些角，如锐角、直角、钝角、平角、周角. 利用这些角，我们已能表示圆周上某些点 P. 但要表示圆周上周而复始地运动着的点，仅有这些角是不够的. 如点 P 绕圆心旋转一周半，所在位置怎样用角来表示？在生活中，也有类似情形. 如在体操、跳水中，有“转体 720°”、“翻腾两周半”这样的动作名称，“720°”在这里也是用来表示旋转程度的一个角.

● 720°是怎样的一个角？

1.1.1 任意角

一个角可以看做平面内一条射线绕着它的端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形. 射线的端点称为角的顶点，射线旋转的开始位置和终止位置称为角的始边和终边.

约在公元前2 000年左右，巴比伦人就习惯将圆周划分为360度，每度分为60分，每分再划分为60秒. 这种度量方法一直沿用至今.

如图 1-1-1 所示，射线 OA 绕端点 O，按箭头所示方向旋转到 OB 便形成角 α. 点 O 是角 α 的顶点，射线 OA 和 OB 分别是角 α 的始边和终边. 因此 720°就是旋转两周所形成的角.

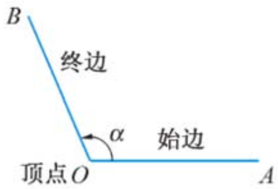


图 1-1-1

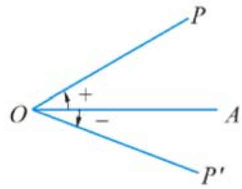


图 1-1-2

为了表示不同旋转方向所形成的角，联想到用正负数可表示具有相反意义的量，我们作如下规定：

按逆时针方向旋转所形成的角叫做**正角**，按顺时针方向旋转所形成的角叫做**负角**. 如果射线没有作任何旋转，那么也把它看成一个角，叫做**零角**（图 1-1-2）.

时针在 1 小时内所转过的角为多少度？

这样就把角的概念推广到了任意角，包括正角、负角和零角. 图 1-1-3中的 $\alpha=420°$，$\beta=-150°$.

如果角的终边在坐标轴上，称这个角为轴线角.

为了便于研究，今后我们常以角的顶点为坐标原点，角的始边为 x 轴正半轴，建立平面直角坐标系. 这样，角的终边（除端点外）在第几象限，就说这个角是第几象

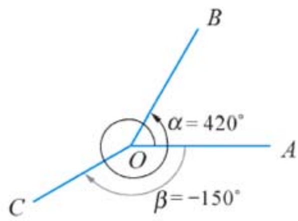


图 1-1-3

限角.

思　考

(1) $-300°$, $-150°$, $-60°$, $60°$, $210°$, $300°$, $420°$角分别是第几象限角？其中哪些角的终边相同？

(2) 具有相同终边的角彼此之间有什么关系？你能写出与 $60°$角终边相同的角的集合吗？(图 1-1-4)

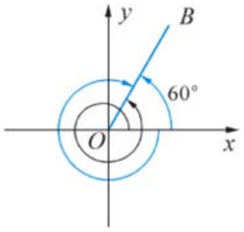


图 1-1-4

> 一般地，与角 α 终边相同的角的集合为
> $$\{\beta \mid \beta = k \cdot 360° + \alpha, k \in \mathbf{Z}\}.$$

例 1　在 $0°$到 $360°$的范围内，找出与下列各角终边相同的角，并分别判断它们是第几象限角：

(1) $650°$;　　(2) $-150°$;　　(3) $-990°15'$.

分析　只需将这些角表示成 $k \cdot 360° + \alpha (0° \leqslant \alpha < 360°)$ 的形式，然后根据 α 来确定它们所在的象限.

解　(1) 因为

$$650° = 360° + 290°,$$

所以 $650°$的角与 $290°$的角终边相同，是第四象限角.

(2) 因为

$$-150° = -360° + 210°,$$

所以 $-150°$ 的角与 $210°$ 的角终边相同，是第三象限角.

(3) 因为

$$-990°15' = -3 \times 360° + 89°45',$$

所以 $-990°15'$ 的角与 $89°45'$ 的角终边相同，是第一象限角.

例 2　已知 α 与 $240°$角的终边相同，判断 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角.

解　由 $\alpha = k \cdot 360° + 240° (k \in \mathbf{Z})$，可得

$$\frac{\alpha}{2} = k \cdot 180° + 120° (k \in \mathbf{Z}).$$

为什么要对 k 分奇数和偶数进行讨论？

若 k 为偶数，设 $k = 2n$, $n \in \mathbf{Z}$，则

$$\frac{\alpha}{2} = n \cdot 360° + 120° (n \in \mathbf{Z}),$$

$\frac{\alpha}{2}$ 与 $120°$角的终边相同，是第二象限角；

若 k 为奇数，设 $k = 2n + 1$, $n \in \mathbf{Z}$，则

$$\frac{\alpha}{2} = n \cdot 360^\circ + 300^\circ (n \in \mathbf{Z}),$$

已知 α 与 240° 角的终边相同，怎样判断 2α 是第几象限角？

$\frac{\alpha}{2}$ 与 300° 角的终边相同，是第四象限角.

所以，$\frac{\alpha}{2}$是第二或第四象限角.

思　考

(1) 终边落在 x 轴正半轴上的角的集合如何表示？终边落在 x 轴上的角的集合如何表示？

(2) 终边落在坐标轴上的角的集合如何表示？

(3) 若 α 是第三象限角，则$\frac{\alpha}{2}$是第几象限角？

练　习

1. 下列命题中正确的是(　　).

A. 第一象限角一定不是负角　　B. 小于 90°的角一定是锐角

C. 钝角一定是第二象限角　　D. 第一象限角一定是锐角

2. 分别作出下列各角的终边，并指出它们是第几象限角：

(1) 330°；　(2) -200°；　(3) 945°；　(4) -650°.

3. 在 0°到 360°的范围内，找出与下列各角终边相同的角，并判断它们是第几象限角：

(1) -55°；　(2) $395^\circ 8'$；　(3) $1\,563^\circ$.

4. 试求出与下列各角终边相同的最小正角和最大负角：

(1) $1\,140^\circ$；　(2) $1\,680^\circ$；　(3) $-1\,290^\circ$；　(4) $-1\,510^\circ$.

5. 若 α 是第四象限角，试分别确定$-\alpha$，$180^\circ+\alpha$，$180^\circ-\alpha$ 是第几象限角.

1.1.2　弧度制

● 在本章引言中，我们曾考虑用(r, l)来表示点 P，那么 r，l 与α之间具有怎样的关系呢？

我们已学习过角的度量，规定周角的$\frac{1}{360}$为 1 度的角，这种用度作为单位来度量角的制度叫做角度制(degree measure). 除了采用角度制外，在科学研究中还经常采用弧度制.

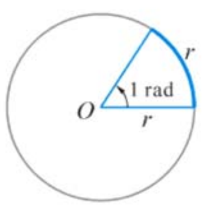


图 1-1-5

长度等于半径的圆弧所对的圆心角叫做 **1** 弧度(radian)的角，记作 1 rad(图 1-1-5). 用弧度作为角的单位来度量角的制度称为弧度制(radian measure).

用弧度表示角的大小时，只要不产生误解，可以省略单位. 例如 1 rad，2 rad，π rad，可分别写成 1，2，π.

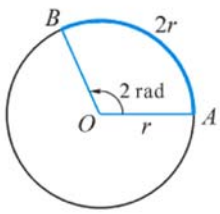


图 1-1-6

正角的弧度数是正数，负角的弧度数是负数，零角的弧度数为 0.

若圆半径为 r，圆心角$\angle AOB$(正角)所对的圆弧长为 $2r$，那么$\angle AOB$ 的弧度数就是 $\frac{2r}{r}=2$ (图 1-1-6).

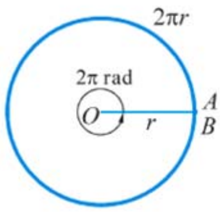


图 1－1－7

若圆半径为 r，圆心角 $\angle AOB$（正角）所对的圆弧长为 $2\pi r$，则 $\angle AOB$ 的弧度数就是 $\frac{2\pi r}{r}=2\pi$（图 1－1－7）．故有

$$360^\circ=2\pi\ \text{rad},$$

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\ \text{rad}\approx 0.017\,45\ \text{rad},$$

$$1\ \text{rad}=\frac{180}{\pi}\ 度\approx 57.30^\circ.$$

图 1－1－8 给出了一些角的弧度数与角度数之间的关系．

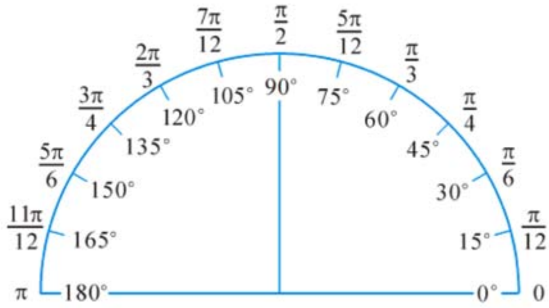


图 1－1－8

例 1 把下列各角从弧度化为度：

(1) $\frac{3\pi}{5}$； (2) 3.5．

解 (1) $\frac{3\pi}{5}\ \text{rad}=\frac{3\pi}{5}\times\frac{180^\circ}{\pi}=108^\circ$；

(2) $3.5\ \text{rad}=3.5\times\frac{180^\circ}{\pi}\approx 200.54^\circ$．

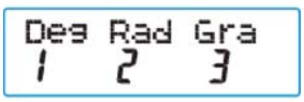
例 2 把下列各角从度化为弧度：

(1) 252°； (2) $11^\circ15'$．

解 (1) $252^\circ=252\times\frac{\pi}{180}\ \text{rad}=\frac{7\pi}{5}\ \text{rad}$；

(2) $11^\circ15'=11.25^\circ=11.25\times\frac{\pi}{180}\ \text{rad}=\frac{\pi}{16}\ \text{rad}$．

CALCULATOR



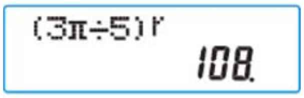
(1) 根据计算的要求，可改变计算器中角的度量单位．

按 MODE MODE 键，出现如左图所示界面，分别按 1 , 2 , 3 ，可设置角的度量单位为度(Deg)、弧度(Rad)和百分度(Gra)．

$\left(90\ 度=\frac{\pi}{2}\ 弧度=100\ 百分度\right)$

(2) 将弧度转化为度(以例 1 为例).

按 [MODE] [MODE] [1] 键，设置角的度量单位为度，再按 [(] [3] [SHIFT] [π] [÷] [5] [)] [SHIFT] [DRG] [2] [=] 键，得 $\frac{3}{5}\pi\ \text{rad}=108°$；



按 [MODE] [MODE] [1] 键，设置角的度量单位为度，再按 [3] [.] [5] [SHIFT] [DRG] [2] [=] 键，得 $3.5\ \text{rad}\approx 200.54°$.

(3) 将度转化为弧度(以例 2 为例).

按 [MODE] [MODE] [2] 键，设置角的度量单位为弧度，再按 [2] [5] [2] [SHIFT] [DRG] [1] [=] 键，得 $252°\approx 4.4\text{rad}$；

按 [MODE] [MODE] [2] 键，再按 [1] [1] [°'''] [1] [5] [°'''] [SHIFT] [DRG] [1] [=] 键，得 $11°15'\approx 0.2\text{rad}$.

得到弧度后，按 [÷] [SHIFT] [π] [=] [SHIFT] [d/c] 键得到 a，那么结果就为“$a\pi$”的形式，这里 a 为分数.

如图 1-1-9，设长度为 r 的线段 OA 绕端点 O 旋转形成角 α(α 为任意角，单位为弧度)，若将此旋转过程中点 A 所经过的路径看成是圆心角 α 所对的弧，设弧长为 l，则有

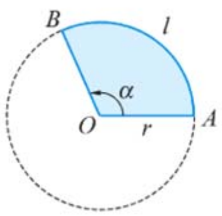


图 1-1-9

$$|\alpha|=\frac{l}{r},$$

即 $$l=|\alpha|r.$$

特别地，若取 $r=1$，则有

$$l=|\alpha|.$$

若 $|\alpha|\leqslant 2\pi$，则有圆心角为 α 的扇形的面积为

$$S=\frac{|\alpha|}{2\pi}\cdot\pi r^2=\frac{1}{2}rl.$$

例 3 已知扇形的周长为 8 cm，圆心角为 2 弧度，求该扇形的面积.

解 设扇形的半径为 r，弧长为 l，

则有 $\begin{cases}2r+l=8,\\ l=2r,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}r=2,\\ l=4.\end{cases}$

故扇形的面积为 $S=\frac{1}{2}rl=4(\text{cm}^2)$.

角的概念推广以后，就可以在角的集合与实数集 **R** 之间建立一一对应关系：每一个角都对应惟一的一个实数；反过来，每一个实数也都对应惟一的一个角.(图 1-1-10)

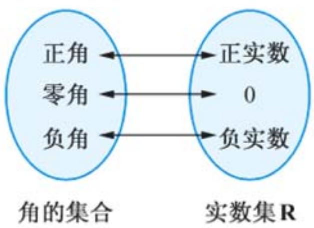


图 1-1-10

练　习

1. （口答）把下列角从度化为弧度：

(1) $180°$；　(2) $90°$；　(3) $45°$；

(4) $30°$；　(5) $120°$；　(6) $270°$.

2. （口答）把下列各角从弧度化为度：

(1) 2π；　(2) $\dfrac{\pi}{2}$；　(3) $\dfrac{\pi}{6}$；　(4) $\dfrac{2}{3}\pi$.

3. 把下列各角从度化为弧度：

(1) $75°$；　(2) $-210°$；　(3) $135°$；　(4) $22°30'$.

4. 把下列各角从弧度化为度：

(1) $\dfrac{\pi}{12}$；　(2) $\dfrac{2}{5}\pi$；　(3) $-\dfrac{4}{3}\pi$；　(4) -12π.

5. 若 $\alpha=-6$，则角 α 的终边在（　　）.

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

6. 已知半径为 240 mm 的圆上，有一段弧的长是 500 mm，求此弧所对的圆心角的弧度数.

7. 直径为 20 cm 的轮子以 45 rad/s（弧度/秒）的速度旋转，求轮周上一点 5 s 内所经过的路程.

习题 1.1

感受·理解

1. 在 $0°$ 到 $360°$ 范围内，找出与下列各角终边相同的角，并指出它们是第几象限角：

(1) $-265°$；　(2) $3\,900°$；

(3) $-840°10'$；　(4) $560°24'$.

2. 写出与下列各角终边相同的角的集合，并把集合中适合不等式 $-360°\leqslant\alpha\leqslant360°$ 的元素 α 写出来：

(1) $60°$；　(2) $-75°$；

(3) $90°$；　(4) $-180°$.

3. 把下列各角从度化为弧度：

(1) $12°30'$；　(2) $-200°$；　(3) $355°$；　(4) $-186°45'$.

4. 如果 α 与 $120°$ 角终边相同，那么 $\dfrac{\alpha}{2}$ 是第几象限角？

5. 终边落在直线 $y=x$ 上的角的集合如何表示？

6. 把下列各角化成 $\alpha+2k\pi(0\leqslant\alpha<2\pi,\ k\in\mathbf{Z})$ 的形式，并指出它们是第几象限角：

(1) $\dfrac{23}{6}\pi$；　(2) $-1\,500°$；　(3) $-\dfrac{18}{7}\pi$；　(4) $672°$.

7. 把下列各角从弧度化为度：

(1) $-\dfrac{5}{12}\pi$；　(2) $\dfrac{8\pi}{3}$；　(3) $\dfrac{2}{3}$；　(4) 1.4.

8. 已知扇形的半径为 10 cm，圆心角为 $60°$，求扇形的弧长和面积.

9. 蒸汽机飞轮的直径为 1.2 m，以 300 r/min（转/分）的速度作逆时针旋转，求：

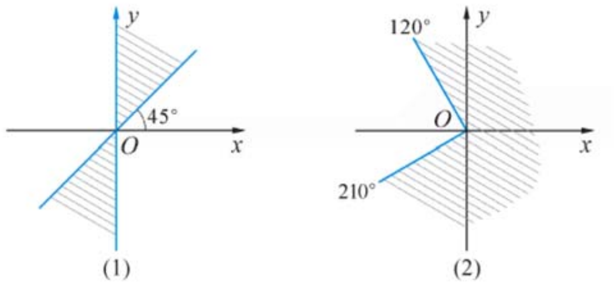
(1) 飞轮 1 s 内转过的弧度数；

(2) 轮周上一点 1 s 内所经过的路程.

思考・运用

10. 已知 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，角 β 的终边与 α 的终边关于直线 $y=x$ 对称，求角 β 的集合.

11. 如图，写出终边落在阴影部分的角的集合(包括边界).



（第 11 题）

探究・拓展

12. 设 θ 是第一象限角，试探究：

(1) 2θ 一定不是第几象限角？

(2) $\frac{\theta}{3}$ 是第几象限角？

13. 若扇形的周长为定值 l，则该扇形的圆心角为多大时，扇形的面积最大？

1.2 任意角的三角函数

用(r, α)与用坐标(x, y)均可表示圆周上点P，那么，这两种表示有什么内在联系？确切地说，

● 用怎样的数学模型建立(x, y)与(r, α)之间的关系？

1.2.1 任意角的三角函数

在初中，我们利用直角三角形定义了锐角三角函数(图1-2-1(1)).

在平面直角坐标系中，设α的终边上任意一点P的坐标是(x, y)，它与原点的距离是$r\left(r=\sqrt{x^2+y^2}>0\right)$.

当α为锐角时(图1-2-1(2))，过P作$PM\perp x$轴，垂足为M，在$\mathrm{Rt}\triangle OPM$中，$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$，$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$.

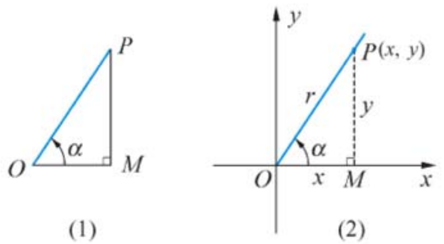


图1-2-1

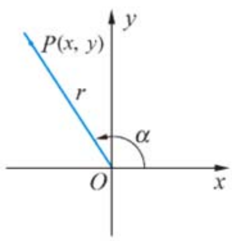


图1-2-2

● 怎样将锐角的三角函数推广到任意角？

一般地，对任意角α(图1-2-2)，我们规定：

(1) 比值$\dfrac{y}{r}$叫做α的正弦，记作$\sin\alpha$，即

$$\sin\alpha=\frac{y}{r};$$

(2) 比值$\dfrac{x}{r}$叫做α的余弦，记作$\cos\alpha$，即

$$\cos\alpha=\frac{x}{r};$$

(3) 比值$\dfrac{y}{x}\ (x\neq 0)$叫做α的正切，记作$\tan\alpha$，即

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}.$$

对于确定的角 α，比值$\frac{y}{r}$和$\frac{x}{r}$都惟一确定，故正弦和余弦都是角 α 的函数. 当 $\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，角 α 的终边在 y 轴上，故有 $x=0$，这时 $\tan\alpha$ 无意义，除此之外，对于确定的角 $\alpha\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})\right)$，比值$\frac{y}{x}$也是惟一确定的，故正切也是角 α 的函数. $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 分别叫做角 α 的正弦函数、余弦函数、正切函数. 以上三种函数都称为三角函数(trigonometric function).

由定义可知，正弦函数、余弦函数、正切函数的值在各象限的符号，如图 1-2-3 所示：

正弦函数值的符号与 y 的符号相同，余弦函数值的符号与 x 的符号相同.

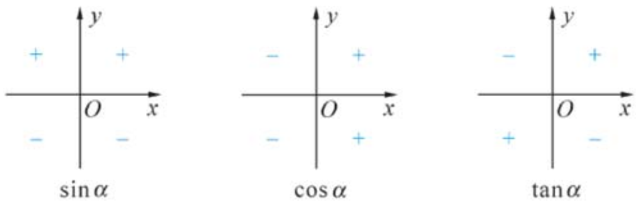


图 1-2-3

下面我们来研究正弦、余弦、正切这三种三角函数值的几何表示，为此先引入有向线段的概念.

规定了方向(即规定了起点和终点)的线段称为有向线段. 类似地，可以把规定了正方向的直线称为有向直线. 若有向线段 AB 在有向直线 l 上或与有向直线 l 平行，根据有向线段 AB 与有向直线 l 的方向相同或相反，分别把它的长度添上正号或负号，这样所得的数，叫做有向线段的数量，记为 AB.

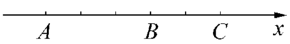


图 1-2-4

如图 1-2-4，x 轴上有三点 A，B，C，则 $AB=3$，$BC=2$，$CB=-2$.

由于 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$ 与点 $P(x, y)$ 在角 α 终边上的位置无关，为简单起见，我们取 $r=1$，即选取角 α 终边与单位圆(圆心在原点，半径等于单位长度的圆)的交点为 $P(x, y)$，则 $\sin\alpha=y$，$\cos\alpha=x$(图 1-2-5).

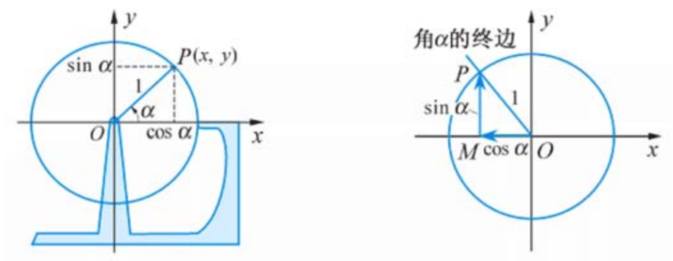


图 1-2-5

在坐标系中，点的坐标就是相应有向线段的数量.

过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M，显然，有向线段 OM 的长度为 $|x|$. 如果 $x>0$，有向线段 OM 与 x 轴同向，其数量为 x；如果 $x<0$，有向线段 OM 与 x 轴反向，其数量也为 x. 故总有 $OM=x$. 同理可知

$MP=y$. 所以，

$$\sin\alpha=MP,\ \cos\alpha=OM.$$

有向线段 MP，OM 分别叫做角 α 的正弦线、余弦线.

探　究

用适当的有向线段来表示第一象限角 α 的正切.

角 α 的终边在 y 轴右侧是指第一象限角或第四象限角，或终边与 x 轴正半轴重合的角.

当角 α 终边在 y 轴的右侧时（图 1－2－6），在角 α 终边上取点 $T(1,\ y')$，则 $\tan\alpha=\dfrac{y'}{1}=y'=AT$（$A$ 为单位圆与 x 轴正半轴的交点）；当角 α 终边在 y 轴的左侧时（图 1－2－7），在角 α 终边的反向延长线上取点 $T(1,\ y')$，由于它关于原点的对称点 $Q(-1,\ -y')$ 在角 α 终边上，故有 $\tan\alpha=\dfrac{-y'}{-1}=y'=AT$.

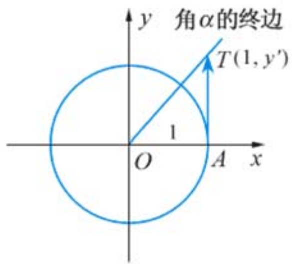


图 1－2－6

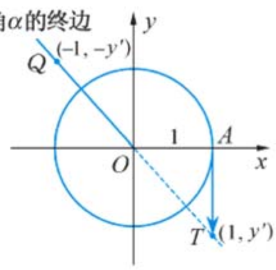


图 1－2－7

即总有

$$\tan\alpha=AT.$$

因此，我们把有向线段 AT 叫做角 α 的正切线.

有向线段 MP，OM，AT 都称为三角函数线.

当角 α 终边在不同象限时，其三角函数线如图 1－2－8 所示：

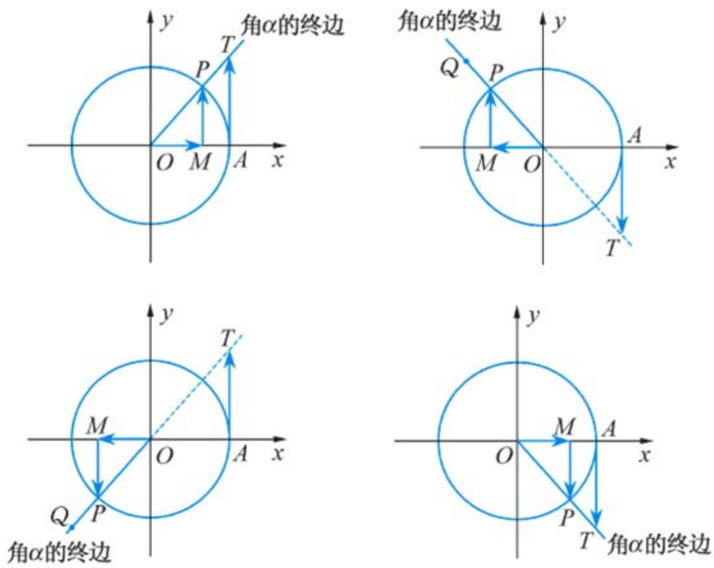
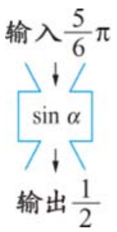


图 1－2－8



当角 α 的终边在 x 轴上时，正弦线、正切线分别变成一个点；当角 α 的终边在 y 轴上时，余弦线变成一个点，正切线不存在.

由于角的集合与实数集之间可以建立一一对应的关系，因此三角函数可以看成是以实数为自变量的函数. 在弧度制下，正弦函数、余弦函数、正切函数的定义域如下表所示：

三 角 函 数	定　　义　　域
$\sin\alpha$	$\mathbf{R}$
$\cos\alpha$	$\mathbf{R}$
$\tan\alpha$	$\{\alpha \mid \alpha \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$

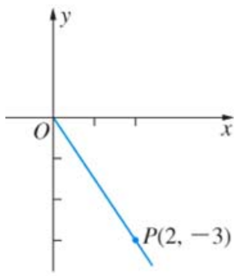


图 1 - 2 - 9

例 1　如图 1 - 2 - 9，已知角 α 的终边经过点 $P(2, -3)$，求 α 的正弦、余弦、正切值.

解　因为　$x=2,\ y=-3$，

所以　$r=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$，

所以　$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-3}{\sqrt{13}}=-\frac{3\sqrt{13}}{13},$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13},$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=-\frac{3}{2}.$$

例 2　确定下列三角函数值的符号：

(1) $\cos\frac{7}{12}\pi$；　　(2) $\sin(-465^\circ)$；　　(3) $\tan\frac{11}{3}\pi$.

解　(1) $\frac{7}{12}\pi$ 是第二象限角，所以

$$\cos\frac{7}{12}\pi<0.$$

(2) 因为 $-465^\circ=-2\times360^\circ+255^\circ$，即 -465° 是第三象限角，所以

$$\sin(-465^\circ)<0.$$

(3) 因为 $\frac{11}{3}\pi=2\pi+\frac{5}{3}\pi$，即 $\frac{11}{3}\pi$ 是第四象限角，所以

$$\tan\frac{11}{3}\pi<0.$$

思 考

根据单位圆中的三角函数线，探究：

(1) 正弦函数、余弦函数、正切函数的值域；

(2) 正弦函数、余弦函数在区间 $[0, 2\pi]$ 上的单调性；

(3) 正切函数在区间$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$上的单调性.

练 习

1. 已知角 α 的终边经过点 $P(-3, 4)$，求 α 的正弦、余弦和正切值.

2. 已知角 α 的终边经过点 $P(-x, -6)$，且 $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$，求 x 的值.

3. 填表：

角 α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
角 α 的弧度数								
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$								
$\tan\alpha$								

4. 设 α 是三角形的一个内角，在 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$，$\tan\frac{\alpha}{2}$ 中，哪些有可能取负值？

5. 确定下列各角的正弦、余弦、正切值的符号：

(1) 885°；　(2) -395°；　(3) $\frac{19}{6}\pi$；　(4) $-\frac{25}{3}\pi$.

6. 若 $\cos\alpha<0$ 且 $\tan\alpha<0$，试确定角 α 为第几象限角.

7. 作出下列各角的正弦线、余弦线、正切线：

(1) $\frac{11}{6}\pi$；　(2) $-\frac{2}{3}\pi$.

8. 根据单位圆中的正弦线，你能发现正弦函数值有怎样的变化规律？

链 接

若我们分别把表示正切、正弦、余弦的三个比$\frac{y}{x}$，$\frac{y}{r}$，$\frac{x}{r}$取倒数，那么又得到三个比，其中：

比值$\frac{x}{y}$叫做角 α 的余切，记作 $\cot\alpha$；

比值$\frac{r}{y}$叫做角 α 的余割，记作 $\csc\alpha$；

比值$\frac{r}{x}$叫做角 α 的正割，记作 $\sec\alpha$.

余切、正割、余割也是以实数为自变量的函数. $\cot\alpha$，$\sec\alpha$，$\csc\alpha$ 分别叫做余切函数、正割函数、余割函数. 它们也都称为三角函数.

1.2.2 同角三角函数关系

● 当角 α 确定后，α 的正弦、余弦、正切值也随之确定，它们之间有何关系？

设角 α 的终边与单位圆交于 P 点（图 1－2－10），则点 P 坐标为 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$. 又由 PO 长为 1，可得

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

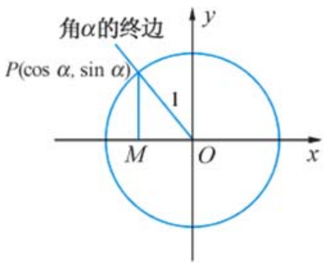


图 1－2－10

由正切函数的定义知，当 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，有

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

由此可得下列同角三角函数之间的基本关系式

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

例 1 已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，且 α 是第二象限角，求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

解 因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}.$$

又 α 是第二象限角，因此 $\cos\alpha<0$，故

$$\cos\alpha=-\frac{3}{5},\ \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{4}{3}.$$

例 2 已知 $\tan\alpha=\frac{12}{5}$，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 的值.

解 由 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha=\frac{12}{5}$,

可得 $\sin\alpha=\frac{12}{5}\cos\alpha.$

又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,

故 $\left(\frac{12}{5}\right)^2\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$

解得 $\cos^2\alpha=\frac{25}{169}.$

又由 $\tan\alpha > 0$，知 α 是第一或第三象限角.

若 α 是第一象限角，则

$$\cos\alpha = \frac{5}{13},\ \tan\alpha = \frac{12}{5},\ \sin\alpha = \frac{12}{13};$$

若 α 是第三象限角，则

$$\cos\alpha = -\frac{5}{13},\ \tan\alpha = \frac{12}{5},\ \sin\alpha = -\frac{12}{13}.$$

例 3　化简 $\tan\alpha\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1}$，其中 α 是第二象限角.

解　因为 α 是第二象限角，所以

$$\sin\alpha > 0,\ \cos\alpha < 0.$$

故

$$\tan\alpha\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1} = \tan\alpha\sqrt{\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}}$$

$$= \tan\alpha\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{|\cos\alpha|}{|\sin\alpha|} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -1.$$

例 4　求证：$\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

本书中的三角恒等式，除特殊注明的情况外，都是指两边都有意义情况下的恒等式.

证法 1　因为 $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} - \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha - (1-\cos^2\alpha)}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha} = 0$，

所以 $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

证法 2　因为 $(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha) = 1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$，

又 $1+\cos\alpha \neq 0$，$\sin\alpha \neq 0$，

所以 $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

思　考

图 1-2-11 中隐藏了一个例 4 的“图形证明”，你能发现吗？

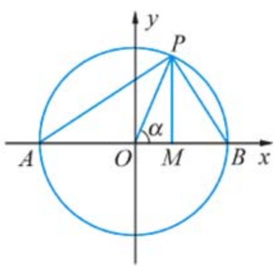


图 1-2-11

练　习

1. 利用三角函数的定义证明同角三角函数关系.
2. 已知 $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$，且 α 为第三象限角，求 $\sin\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

3. 已知 $\sin\alpha=-\dfrac{1}{2}$，求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

4. 已知 $\tan\theta=2$，求 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 的值.

5. 化简：

(1) $\cos\alpha\tan\alpha$；　　(2) $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{1-2\sin^2\alpha}$.

6. 求证：

(1) $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$；

(2) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$；

(3) $\tan^2\alpha\sin^2\alpha=\tan^2\alpha-\sin^2\alpha$.

1.2.3　三角函数的诱导公式

由三角函数定义可以知道：终边相同的角的同一三角函数值相等. 即有

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha\quad(k\in\mathbf{Z}),$$
$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha\quad(k\in\mathbf{Z}),\qquad\text{（公式一）}$$
$$\tan(\alpha+2k\pi)=\tan\alpha\quad(k\in\mathbf{Z}).$$

除此之外还有一些角，它们的终边具有某种特殊关系，如关于坐标轴对称、关于原点对称等. 那么它们的三角函数值有何关系呢？

如果角 α 的终边与角 β 的终边关于 x 轴对称，那么 α 与 β 的三角函数值之间有什么关系？

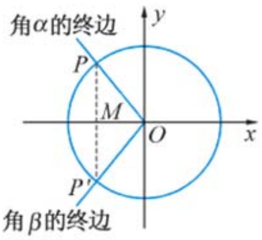


图 1－2－12

设角 α，β 的终边分别与单位圆交于点 P，P'，则点 P 和点 P' 关于 x 轴对称(图 1－2－12). 又根据三角函数的定义，点 P 的坐标是 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，点 P' 的坐标是 $(\cos\beta,\ \sin\beta)$. 故有

$$\sin\beta=-\sin\alpha,\ \cos\beta=\cos\alpha.$$

由同角三角函数关系得

$$\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\tan\alpha.$$

特别地，角 $-\alpha$ 与角 α 的终边关于 x 轴对称，故有

由公式二你可得到三角函数的什么性质？

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha,\qquad\text{（公式二）}$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha.$$

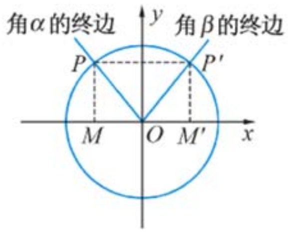


图 1-2-13

若角 α 的终边与角 β 的终边关于 y 轴对称(图 1-2-13),同理可得

$$\sin\beta=\sin\alpha,\ \cos\beta=-\cos\alpha,\ \tan\beta=-\tan\alpha.$$

特别地,角 $\pi-\alpha$ 与角 α 的终边关于 y 轴对称,故有

$$\begin{aligned}&\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\\&\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,\\&\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha.\end{aligned}\qquad\text{(公式三)}$$

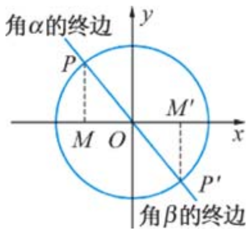


图 1-2-14

若角 α 的终边与角 β 的终边关于原点 O 对称(图 1-2-14),同理可得

$$\sin\beta=-\sin\alpha,\ \cos\beta=-\cos\alpha,\ \tan\beta=\tan\alpha.$$

特别地,角 $\pi+\alpha$ 与角 α 的终边关于原点 O 对称,故有

$$\begin{aligned}&\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\\&\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,\\&\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha.\end{aligned}\qquad\text{(公式四)}$$

思　考

由公式二、三,你能推导出公式四吗?根据公式二、三、四中的任意两组公式,你能推导出另外一组公式吗?

例 1 求值:

(1) $\sin\frac{7}{6}\pi$;　　(2) $\cos\frac{11}{4}\pi$;　　(3) $\tan(-1\,560^\circ)$.

解 (1) $\sin\frac{7}{6}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$;

(2) $\cos\frac{11}{4}\pi=\cos\left(2\pi+\frac{3}{4}\pi\right)=\cos\frac{3}{4}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

(3) $\tan(-1\,560^\circ)=-\tan 1\,560^\circ=-\tan(4\times360^\circ+120^\circ)$

$=-\tan 120^\circ=-\tan(180^\circ-60^\circ)$

$=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$.

如何将任意角的三角函数转化为锐角的三角函数?试总结出一般算法,并画出算法流程图.

例 1 表明,利用上面的公式可将任意角的三角函数转化为锐角三角函数.

例 2 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=1-\cos x$； (2) $g(x)=x-\sin x$.

解 (1) 因为函数 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，且

$$f(-x)=1-\cos(-x)=1-\cos x=f(x),$$

所以 $f(x)$ 是偶函数.

(2) 因为函数 $g(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，且

$$\begin{aligned}g(-x)&=-x-\sin(-x)=-x-(-\sin x)\\&=-(x-\sin x)=-g(x),\end{aligned}$$

所以 $g(x)$ 是奇函数.

练 习

1. 求值：

(1) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$； (2) $\cos(-60^\circ)$； (3) $\tan\dfrac{7}{6}\pi$； (4) $\sin 225^\circ$.

2. 求值：

(1) $\sin 150^\circ$； (2) $\tan 1\,020^\circ$； (3) $\sin\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right)$； (4) $\sin(-750^\circ)$.

3. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=|\sin x|$； (2) $f(x)=\sin x\cos x$.

探 究

若角 α 的终边与角 β 的终边关于直线 $y=x$ 对称(图 1-2-15)，

(1) 角 α 与角 β 的正弦函数和余弦函数值之间有何关系？

(2) 角 $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ 的终边与角 α 的终边是否关于直线 $y=x$ 对称？

(3) 由(1)，(2)你能发现什么结论？

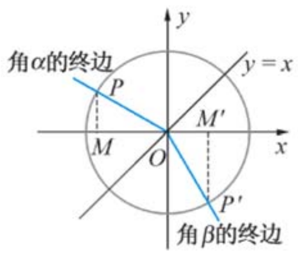


图 1-2-15

由上述探究，可得

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha. \qquad \text{(公式五)}$$

此公式实际上是直角三角形中两锐角间三角函数关系的推广.

利用公式二和公式五，可得

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-(-\alpha)\right]=\cos(-\alpha)=\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(-\alpha)\right]=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha.$$

故有

你能利用单位圆中的三角函数线导出公式六吗?

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha. \qquad \text{(公式六)}$$

思　考

你能推导出 $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$与 $\tan\alpha$ 之间的关系吗?

若两个角 α,β 的和 $\alpha+\beta$(或差 $\alpha-\beta$)为 $\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,则 α,β 的三角函数之间必定具有诱导公式的关系,进而可相互转换.

公式一、二、三、四、五、六都叫做三角函数的诱导公式.

诱导公式揭示了终边具有某种对称关系的两个角三角函数之间的关系. 换句话说,诱导公式实质是将终边对称的图形关系"翻译"成三角函数之间的代数关系.

例 3 求证:$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha$, $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\sin\alpha$.

证明

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\sin\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]$$

$$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\cos\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha.$$

例 4 已知 $\cos(75^\circ+\alpha)=\frac{1}{3}$,且 $-180^\circ<\alpha<-90^\circ$,求 $\cos(15^\circ-\alpha)$ 的值.

分析 注意到 $(15^\circ-\alpha)+(75^\circ+\alpha)=90^\circ$,因此可将 $\cos(15^\circ-\alpha)$ 转化为 $\sin(75^\circ+\alpha)$.

解 由 $-180^\circ<\alpha<-90^\circ$,

得 $-105^\circ<75^\circ+\alpha<-15^\circ$,

则 $\sin(75^\circ+\alpha)<0$.

又 $\cos(75^\circ+\alpha)=\frac{1}{3}$,

所以

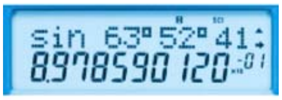
$$\cos(15^\circ-\alpha)=\cos[90^\circ-(75^\circ+\alpha)]=\sin(75^\circ+\alpha)$$

$$=-\sqrt{1-\cos^2(75^\circ+\alpha)}=-\sqrt{1-\frac{1}{9}}$$

$$=-\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

CALCULATOR

用计算器计算任意角的三角函数值时,先设置角度单位,然后再计算(默认角度单位是度)。例如,可这样计算 $\sin 63^\circ 52' 41''$.



(1) 按 MODE MODE 1 键，设置角度单位为度；

(2) 按 sin 6 3 °′″ 5 2 °′″ 4 1 °′″ = 键，得 $\sin 63°52'41'' \approx 0.9$.

按以下顺序按键可得 $\tan\dfrac{\pi}{5} \approx 0.73$：

MODE MODE 2 tan (SHIFT π ÷ 5) =.

练　习

1. 已知 $\sin 53.13° = 0.8$，求 $\cos 143.13°$ 和 $\cos 216.87°$.

2. 求证：$\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\sin\alpha$，$\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\cos\alpha$.

3. 化简：

(1) $\dfrac{\cos(\alpha - \pi)}{\sin(\pi - \alpha)} \cdot \sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$；

(2) $\dfrac{\cos(2\pi - \alpha)\sin(\pi + \alpha)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)\tan(3\pi - \alpha)}$.

4. 已知 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = -\dfrac{1}{5}$，且 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$，求 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$ 的值.

习题 1.2

感受 · 理解

1. 已知角 α 的终边经过下列各点，求 α 的正弦、余弦、正切值：

(1) $(-8, -6)$；　　(2) $(\sqrt{3}, -1)$.

2. 作出下列各角的正弦线、余弦线、正切线：

(1) $\dfrac{\pi}{4}$；　　(2) $-\dfrac{\pi}{6}$；　　(3) $-\dfrac{3\pi}{4}$；　　(4) $\dfrac{14\pi}{3}$.

3. 求下列各式的值：

(1) $5\sin 90° + 2\sin 0° - 3\sin 270° + 10\cos 180°$；

(2) $\sin\dfrac{\pi}{6} - \cos^2\dfrac{\pi}{4}\cos\pi - \dfrac{1}{3}\tan^2\dfrac{\pi}{6} - \cos\pi + \sin\dfrac{\pi}{2}$.

4. 分别根据下列条件求函数

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 4\cos 2x + 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$$

的值：

(1) $x = \dfrac{\pi}{4}$；　　(2) $x = \dfrac{3\pi}{4}$.

5. 确定下列各式的符号：

(1) $\cos 310°\tan(-108°)$；　　(2) $\sin\dfrac{5\pi}{4}\cos\dfrac{4\pi}{5}\tan\dfrac{11\pi}{6}$.

6. 根据下列条件，确定 θ 是第几象限角或哪个坐标轴上的角：

(1) $\sin\theta < 0$ 且 $\cos\theta > 0$；　　(2) $\sin\theta\cos\theta > 0$；

(3) $\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta} > 0$；　　(4) $|\sin\theta| = \sin\theta$.

7. (1) 已知 $\cos\theta = \dfrac{12}{13}$，且 θ 为第四象限角，求 $\sin\theta$ 和 $\tan\theta$；

(2) 已知 $\sin x=-\dfrac{1}{3}$，求 $\cos x$ 和 $\tan x$.

8. 已知 $\tan\alpha=3$，$\pi<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi$，求 $\cos\alpha-\sin\alpha$ 的值.

9. (1) 设 $\tan\alpha=2$，计算 $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$；

(2) 设 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{2}$，计算 $\dfrac{1}{\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}$.

10. 化简：

(1) $\tan\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}$，其中 θ 为第二象限角；

(2) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$，其中 α 为第四象限角.

11. 已知 $x=a\cos\theta$，$y=b\sin\theta$，

求证：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

12. 证明下列恒等式：

(1) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$；

(2) $\dfrac{1-2\sin x\cos x}{\cos^2x-\sin^2x}=\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$.

13. 求下列三角函数值：

(1) $\cos\left(-\dfrac{17}{4}\pi\right)$；　　(2) $\sin\dfrac{26}{3}\pi$；

(3) $\cos 1\,650°$；　　(4) $\sin 1\,740°$.

14. 化简：

(1) $\sin(-1\,071°)\sin 99°+\sin(-171°)\sin(-261°)$；

(2) $1+\sin(\alpha-2\pi)\sin(\pi+\alpha)-2\cos^2(-\alpha)$.

15. 已知 $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{4}$，求 $\sin\left(\dfrac{5}{6}\pi-x\right)+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$ 的值.

思考·运用

16. 若角 θ 的终边经过点 $P(4a,-3a)$ $(a\neq 0)$，求 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的值.

17. 利用单位圆分别写出符合下列条件的角 α 的集合：

(1) $\sin\alpha=-\dfrac{1}{2}$；　　(2) $\sin\alpha>-\dfrac{1}{2}$.

18. (1) 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$，求 $\sin\alpha\cos\alpha$ 及 $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$ 的值；

(2) 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}(0<\alpha<\pi)$，求 $\tan\alpha$ 的值.

探究·拓展

19. 当角 α，β 满足什么条件时，有 $\sin\alpha=\sin\beta$？

20. 若 α 为锐角(单位为弧度)，试利用单位圆及三角函数线，比较 α，$\sin\alpha$，$\tan\alpha$ 之间的大小关系.

1.3 三角函数的图象和性质

三角函数是刻画圆周运动的数学模型，那么，“周而复始”的基本特征必定蕴含在三角函数的性质之中.

● 三角函数具有哪些性质？

1.3.1 三角函数的周期性

由单位圆中的三角函数线可知，正弦、余弦函数值的变化呈现出周期现象. 每当角增加(或减少)2π，所得角的终边与原来角的终边相同，故两角的正弦、余弦函数值也分别相同. 即有

$$\sin(2\pi+x)=\sin x,\ \cos(2\pi+x)=\cos x.$$

正弦函数和余弦函数所具有的这种性质称为周期性.

若记 $f(x)=\sin x$，则对于任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+2\pi)=f(x)$. 这又启发我们思考：

● 如何用数学语言刻画函数的周期性？

一般地，对于函数 $f(x)$，如果存在一个非零的常数 T，使得定义域内的每一个 x 值，都满足

$$f(x+T)=f(x),$$

那么函数 $f(x)$ 就叫做周期函数(periodic function)，非零常数 T 叫做这个函数的周期(period).

易知 2π 是正弦函数和余弦函数的周期，且 4π，6π，…以及 -2π，-4π，…都是正弦函数和余弦函数的周期，即每一个常数 $2k\pi$($k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq0$)都是这两个函数的周期.

思　考

一个周期函数的周期有多少个？周期函数的图象具有什么特征？

对于一个周期函数 $f(x)$，如果在它所有的周期中存在一个最小的正数，那么这个最小的正数就叫做 $f(x)$ 的**最小正周期**.

例如，2π 是正弦函数的所有周期中的最小正数(同学们可从单位圆中正弦线的变化特征看出这一结论，其证明见本节后“链接”)，所以 2π 是正弦函数的最小正周期；同样地，2π 也是余弦函数的最小正周期.

因此，正弦函数和余弦函数都是周期函数，$2k\pi(k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq 0)$ 都是它们的周期，它们的最小正周期都是 2π.

今后本书中所说的周期，如果不加特别说明，一般都是指函数的最小正周期.

思 考

观察正切线并回答：正切函数是否为周期函数？若是周期函数，其周期为多少？若不是周期函数，请说明理由.

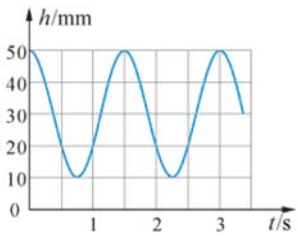


图 1-3-1

例 1 若钟摆的高度 h(mm) 与时间 t(s) 之间的函数关系如图 1-3-1 所示.

(1) 求该函数的周期；

(2) 求 $t=10$ s 时钟摆的高度.

解 (1) 由图象可知，该函数的周期为 1.5 s.

(2) 设 $h=f(t)$，由函数 $f(t)$ 的周期为 1.5 s，可知

$$f(10)=f(1+6\times1.5)=f(1)=20,$$

故 $t=10$ s 时钟摆的高度为 20 mm.

例 2 求下列函数的周期：

(1) $f(x)=\cos 2x$； (2) $g(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$.

解 (1) 设 $f(x)$ 周期为 T，则 $f(x+T)=f(x)$，即 $\cos 2(x+T)=\cos 2x$ 对任意实数 x 都成立. 也就是 $\cos(u+2T)=\cos u$ 对任意实数 u 都成立，其中 $u=2x$.

由 $y=\cos u$ 的周期为 2π，可知使得 $\cos(u+2T)=\cos u$ 对任意实数 u 都成立的 $2T$ 的最小正值为 2π，可知 $2T=2\pi$，即 $T=\pi$.

所以 $f(x)=\cos 2x$ 的周期为 π.

(2) 设 $g(x+T)=g(x)$，则

$$2\sin\left[\frac{1}{2}(x+T)-\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$$

对任意实数 x 都成立，即 $\sin\left(u+\frac{1}{2}T\right)=\sin u$ 对任意实数 u 都成立，其中 $u=\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}$.

由 $y=\sin u$ 的周期为 2π，可知 $\frac{1}{2}T=2\pi$，得 $T=4\pi$.

所以 $g(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的周期为 4π.

若函数 $y=f(x)$ 的周期为 T，则函数 $y=Af(\omega x+\varphi)$ 的周期为 $\frac{T}{|\omega|}$（其中 A,ω,φ 为常数，且 $A\neq0$，$\omega\neq0$）.

一般地，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 及 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$（其中 A，ω，φ 为常数，且 $A\neq0$，$\omega>0$）的周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

链 接

2π 是正弦函数的最小正周期

由诱导公式易知，2π 是正弦函数的一个周期. 下面用反证法证明 2π 是它的最小正周期.

假设 $0<T<2\pi$，且 T 是正弦函数的周期，则对任意实数 x，都有 $\sin(x+T)=\sin x$ 成立. 令 $x=0$，得 $\sin T=0$，即 $T=k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 又 $0<T<2\pi$，故 $T=\pi$，从而对任意实数 x，都有 $\sin(x+\pi)=\sin x$ 成立，与 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)\neq\sin\frac{\pi}{2}$ 矛盾，故正弦函数没有比 2π 小的正周期.

反例举一个即可.

由此可知，2π 是正弦函数的最小正周期.

练 习

1. 判断下列说法是否正确，并简述理由：

(1) $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\neq\sin x$，则 $\frac{2}{3}\pi$ 一定不是函数 $y=\sin x$ 的周期；

(2) $x=\frac{7}{6}\pi$ 时，$\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin x$，则 $\frac{2\pi}{3}$ 一定是函数 $y=\sin x$ 的周期.

2. 求下列函数的周期：

(1) $y=2\cos 3x$；

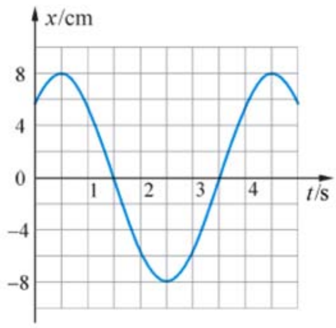
(2) $y=\sin\frac{x}{3}$.

3. 若函数 $f(x)=\sin\left(kx+\frac{\pi}{5}\right)$ 的最小正周期为 $\frac{2}{3}\pi$，求正数 k 的值.

4. 若弹簧振子对平衡位置的位移 $x(\text{cm})$ 与时间 $t(\text{s})$ 之间的函数关系如图所示：

(1) 求该函数的周期；

(2) 求 $t=10.5\text{ s}$ 时弹簧振子对平衡位置的位移.



（第 4 题）

1.3.2 三角函数的图象与性质

为了更加直观地研究三角函数的性质，可以先作出它们的图象.

怎样作出正弦函数的图象？

先画正弦函数的图象. 由于 $y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数，故只要画出在$[0, 2\pi]$上的图象，然后由周期性就可以得到整个图象. 下面我们借助正弦线来画出 $y=\sin x$ 在$[0, 2\pi]$上的图象.

首先，我们来作坐标为$(x_0, \sin x_0)$的点 S. 不妨设 $x_0>0$，如图 1－3－2 所示，在单位圆中设$\overset{\frown}{AP}$的长为 x_0（即$\angle AO'P=x_0$），则 $MP=\sin x_0$. 所以点 $S(x_0, \sin x_0)$是以$\overset{\frown}{AP}$的长为横坐标，正弦线 MP 的数量为纵坐标的点.

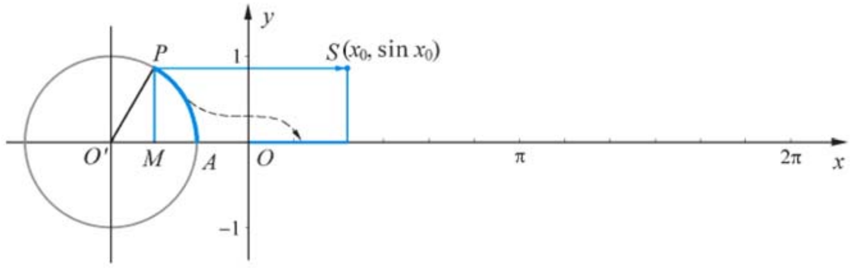


图 1－3－2

知道如何作出函数 $y=\sin x$ 图象上的一个点，就可作出一系列点. 例如，在单位圆中，作出对应于

$$\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \cdots,\ \frac{11\pi}{6}$$

的角及相应的正弦线. 相应地，把 x 轴上从 0 到 2π 这一段分成 12 等份. 把角 x 的正弦线向右平移，使它的起点与 x 轴上表示数 x 的点重合，再用光滑曲线把这些正弦线的终点连结起来，就得到正弦函数 $y=\sin x$ 在 $[0,\ 2\pi]$ 区间上的图象，如图 1－3－3 所示.

在 http://www.1088.com.cn/move/004 上可浏览动画课件.

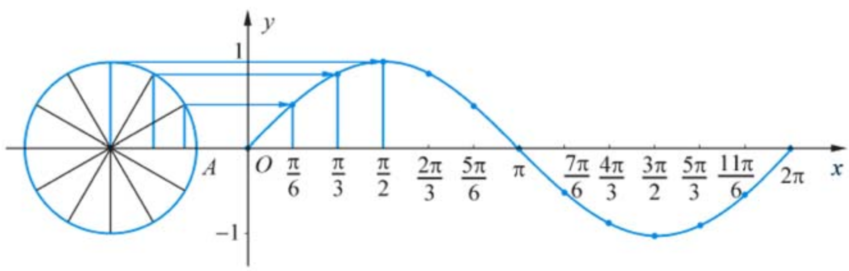


图 1－3－3

最后我们只要将函数 $y=\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的图象向左、右平移(每次 2π 个单位)，就可以得到正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象(图 1－3－4). 正弦函数的图象叫做正弦曲线(sine curve).

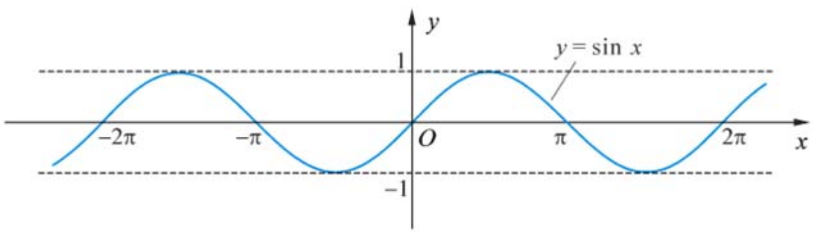


图 1－3－4

以上是借助正弦线描点来作出正弦曲线，也可以通过列表描点来作出正弦曲线，或利用图形计算器、计算机来作出正弦曲线.

Excel

在计算机上，用 Excel 软件可方便地绘制正弦曲线，步骤如下：

(1) 设置角(弧度)：在单元格 A1，A2 内分别输入 0，0.1，选中 A1，A2 后拖拽填充柄至单元格出现 6.3 为止.

在[0，6.3]上作图，即作出正弦函数在一个周期内的图象.

(2) 计算正弦值：在 B1 内输入“ = sin(A1)”，双击 B1 的填充柄即得到与第一列相对应的正弦值.

(3) 成图：光标置于数据区任一位置，按“插入/图表/散点图”选择“无数据点平滑散点图”，点击“完成”(图 1 - 3 - 5).

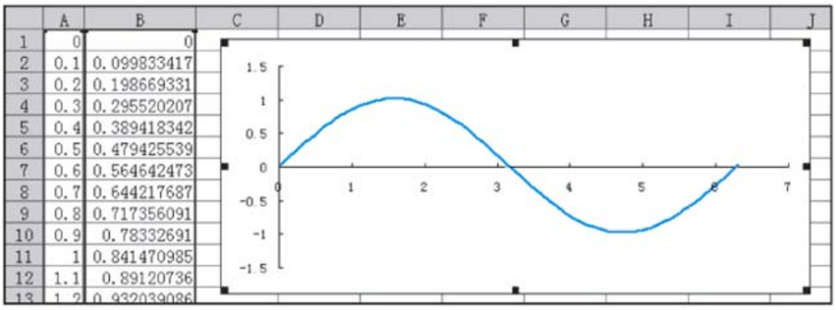


图 1 - 3 - 5

由图 1 - 3 - 5 可以看出，函数 $y = \sin x$，$x \in [0, 2\pi]$的图象上起着关键作用的点有以下五个：

$$(0,\ 0),\ \left(\frac{\pi}{2},\ 1\right),\ (\pi,\ 0),\ \left(\frac{3}{2}\pi,\ -1\right),\ (2\pi,\ 0).$$

事实上，描出五点后，函数 $y = \sin x$，$x \in [0, 2\pi]$的图象形状就基本确定了. 因此在精确度要求不太高时，我们常常先找出这五个关键点，然后用光滑的曲线将它们连接起来，就得到函数的简图. 今后，我们将经常使用这种“五点(画图)法”.

由 $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$，可知 $y = \cos x$ 图象可由 $y = \sin x$ 图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位得到. 余弦函数的图象叫做余弦曲线(cosine curve).

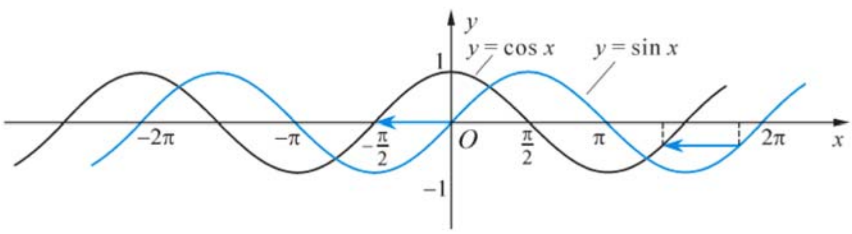


图 1 - 3 - 6

你能用余弦线作出余弦曲线吗？

观察正弦曲线和余弦曲线(图 1 - 3 - 6)，我们得到正弦函数、余弦函数有以下主要性质：

(1) 定义域

正弦函数、余弦函数的定义域都是实数集 **R**.

（2）值域

由正弦曲线和余弦曲线可以发现，

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1,\ -1 \leqslant \cos x \leqslant 1,$$

而且 $\sin x$，$\cos x$ 都可以取$[-1,\ 1]$中的一切值. 这说明正弦函数、余弦函数的值域都是$[-1,\ 1]$. 其中正弦函数当且仅当

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$$

时取得最大值 1，当且仅当

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$$

时取得最小值 -1；而余弦函数当且仅当

$$x = 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$$

时取得最大值 1，当且仅当

$$x = (2k+1)\pi (k \in \mathbf{Z})$$

时取得最小值 -1.

（3）周期性

正弦函数和余弦函数都是周期函数，并且周期都是 2π.

（4）奇偶性

正弦函数是奇函数，其图象关于原点对称；余弦函数是偶函数，其图象关于 y 轴对称.

（5）单调性

由单位圆中的三角函数线，也容易发现这些性质.

由正弦曲线可以看出，当 x 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增大到$\frac{\pi}{2}$ 时，曲线逐渐上升，$\sin x$ 的值由 -1 增大到 1；当 x 由$\frac{\pi}{2}$ 增大到$\frac{3\pi}{2}$ 时，曲线逐渐下降，$\sin x$ 的值由 1 减小到 -1.

这个变化情况如下表所示：

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin x$	-1	0	1	0	-1

由正弦函数的周期性可知：正弦函数在每一个闭区间

$$\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$$

上都是单调增函数，其值由-1增大到 1；在每一个闭区间

$$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$$

上都是单调减函数，其值由 1 减小到 -1. 所以这两类闭区间的每一个都是正弦函数的单调区间.

思　考

写出余弦函数的单调区间.

例 1 用“五点法”画出下列函数的简图：

（1）$y=2\cos x$，$x\in\mathbf{R}$；　　（2）$y=\sin 2x$，$x\in\mathbf{R}$.

解 （1）先用“五点法”画一个周期的图象，列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$2\cos x$	2	0	-2	0	2

描点画图，然后由周期性得整个图象(图 1－3－7).

函数 $y=2\cos x$ 与 $y=\cos x$ 的图象之间有何联系？

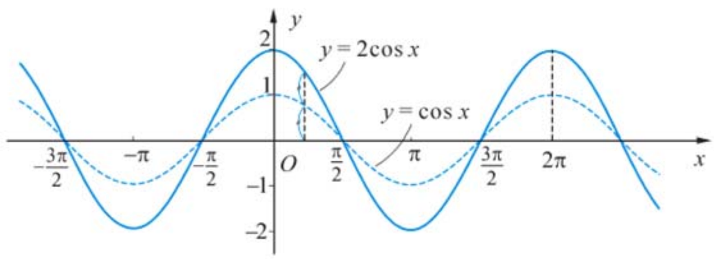


图 1－3－7

（2）先用“五点法”画一个周期的图象，列表：

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin 2x$	0	1	0	-1	0

描点画图，然后由周期性得整个图象(图 1－3－8).

函数 $y=\sin 2x$ 与 $y=\sin x$ 的图象之间有何联系？

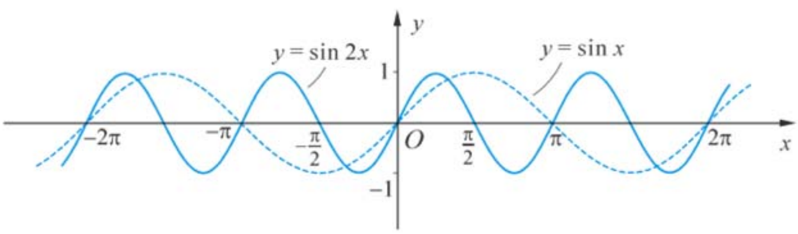


图 1－3－8

例 2 求下列函数的最大值及取得最大值时自变量 x 的集合：

(1) $y=\cos\dfrac{x}{3}$； (2) $y=2-\sin 2x$.

解 (1) 函数 $y=\cos\dfrac{x}{3}$ 的最大值为 1.

因为使 $\cos z$ 取得最大值的 z 的集合为

$$\{z \mid z=2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\},$$

令 $z=\dfrac{x}{3}$，

由 $\dfrac{x}{3}=2k\pi$，得 $x=6k\pi$.

所以，使函数 $y=\cos\dfrac{x}{3}$ 取得最大值的 x 的集合为

$$\{x \mid x=6k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

(2) 函数 $y=2-\sin 2x$ 的最大值为 $2-(-1)=3$.

因为使 $\sin z$ 取得最小值的 z 的集合为

$$\left\{z \,\middle|\, z=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\},$$

令 $z=2x$，

由 $2x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，得 $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

所以，使函数 $y=2-\sin 2x$ 取得最大值的 x 的集合为

$$\left\{x \,\middle|\, x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

例 3 求函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的单调增区间.

解 令 $z=2x+\dfrac{\pi}{3}$，函数 $y=\sin z$ 的单调增区间为 $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ \dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right]$.

由 $$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$

得 $$-\frac{5}{12}\pi+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

故函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的单调增区间为

$$\left[-\frac{5}{12}\pi+k\pi,\ \frac{\pi}{12}+k\pi\right]\ (k\in\mathbf{Z}).$$

练 习

1. 下列各等式有可能成立吗？为什么？

(1) $2\cos x=3$；　　(2) $\sin^2 x=0.5$.

2. 画出下列函数的简图，并说明这些函数的图象与正弦曲线的区别和联系：

(1) $y=\sin x-1$；　　(2) $y=2\sin x$.

3. 画出下列函数的简图，并说明这些函数的图象与余弦曲线的区别和联系：

(1) $y=1+\cos x$；　　(2) $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

4. 求下列函数的最小值及取得最小值时自变量 x 的集合：

(1) $y=-2\sin x$；　　(2) $y=2-\cos\dfrac{x}{3}$.

5. 函数 $y=\sin x\left(\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 的值域是(　　).

A. $[-1,1]$　　B. $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$

C. $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$　　D. $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

6. 求下列函数的单调区间：

(1) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$；　　(2) $y=3\cos\dfrac{x}{2}$.

7. 不求值，分别比较下列各组中两个三角函数值的大小：

(1) $\sin 250^\circ$ 与 $\sin 260^\circ$；　　(2) $\cos\dfrac{15}{8}\pi$ 与 $\cos\dfrac{14}{9}\pi$.

由于正切函数 $y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数，故只需先画出一个周期内的图象，然后由周期性，就可得整个图象.

先利用正切线来画出函数 $y=\tan x\left(x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$的图象(图 1－3－9).

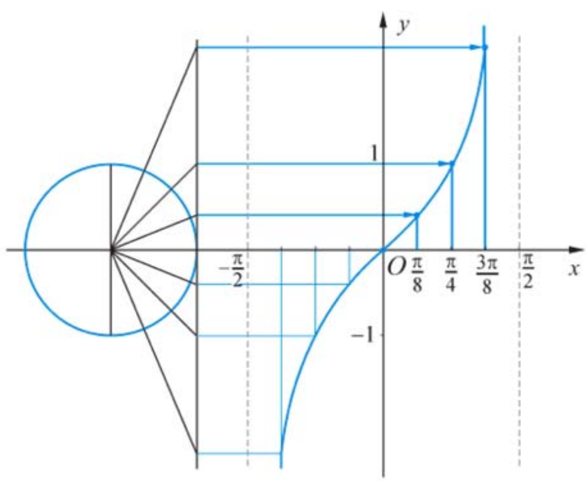


图 1－3－9

把上述图象向左、右平移(每次 π 个单位)，就可得到正切函数的图象(图 1－3－10)，并把它称为正切曲线(tangent curve).

正切曲线有哪些主要特征？图中的虚线与它有什么关系？

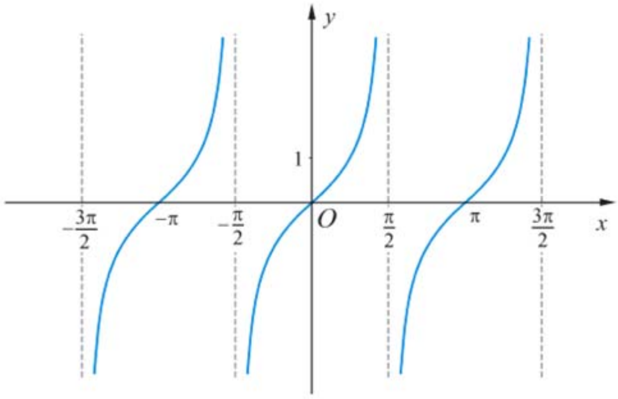


图 1－3－10

由正切函数的图象可以得到正切函数的主要性质如下：

(1) 定义域：$\left\{x \middle| x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

(2) 值域：实数集 **R**.

(3) 周期性：正切函数是周期为 π 的周期函数.

(4) 奇偶性：奇函数. 图象关于原点对称.

(5) 单调性：每个开区间 $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)(k \in \mathbf{Z})$ 都是函数 $y = \tan x$ 的单调增区间.

思　考

正切函数在整个定义域内是增函数吗？

例 4　求函数 $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的定义域.

解　因为 $y = \tan z$ 的定义域为

$$\left\{z \middle| z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\},$$

令　$z = 2x - \frac{\pi}{4}$,

由　$2x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$,

可得　$x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$,

所以 $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的定义域是

$$\left\{x \middle| x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

你能求出此函数的周期和单调区间吗？

例 5　求 $f(x) = \tan 2x$ 的周期.

解　设 $f(x)$ 周期为 T，则

$$f(x+T)=f(x),$$

即 $\tan 2(x+T)=\tan 2x$.

令 $u=2x$,得

$$\tan(u+2T)=\tan u.$$

由 $\tan u$ 的周期为 π,可知 $2T=\pi$,即 $T=\frac{\pi}{2}$. 所以 $f(x)=\tan 2x$ 的周期为$\frac{\pi}{2}$.

练　习

1. 观察正切函数的图象,分别写出满足下列条件的 x 的集合:

(1) $\tan x=0$;　　(2) $\tan x<0$.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\tan 3x$;　(2) $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$;　(3) $y=\tan\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$.

3. 不求值,判断下列各式的符号:

(1) $\tan 138°-\tan 143°$;　　(2) $\tan\left(-\frac{13}{4}\pi\right)-\tan\left(-\frac{17}{5}\pi\right)$.

4. 函数 $y=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\text{ 且 }x\neq 0\right)$的值域是(　　).

A. $[-1,1]$　　B. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

C. $(-\infty,1)$　　D. $[-1,+\infty)$

阅　读

正切、余切等三角函数的由来

正切和余切的概念是由阿拉伯天文学家、数学家巴塔尼(al-Battani, 约 858～929)提出的. 为了测定太阳的仰角,他把一根定长的杆子树立在地面上,再以这定长为单位量出日影的长度,并把这样的阴影叫做“直阴影”;有时他把定长的杆水平地插在墙上,这时水平杆投影在墙上的影长(以定长为单位)叫做“反阴影”. 后来在拉丁文译本中,“直阴影”变成“余切”,“反阴影”变成“正切”. 公元 920 年左右,巴塔尼编制了从 0°到 90°的每隔 1°的余切表.

后来,另一位阿拉伯天文学家、数学家艾布・瓦法(Abu'l-Wafa, 940～998)编制了每隔 10°的正弦表和正切表,他还首次引入正割和余割,可惜没有引起同时代人的注意.

16 世纪时,天文观测日益精密,迫切需要更为精确的三角函数表. 天文学家哥白尼的学生雷蒂库斯(Rheticus, 1514～1574)重新给出三角函数的定义,即把它定义为直角三角形的边长之比,并首次编制全部六个三角函数表.

17 世纪时,现在通用的六个三角函数的符号陆续由不同的学者引入. 18 世纪时,由于瑞士数学家欧拉的使用,这些符号得以推广.

1.3.3 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象

设物体做简谐运动时，位移 s 和时间 t 的关系为

$$s = A\sin(\omega t + \varphi)\ (A > 0,\ \omega > 0),$$

其中 A 是物体振动时离开平衡位置的最大距离，称为振动的振幅；往复振动一次所需的时间

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

称为这个振动的周期；单位时间内往复振动的次数

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

称为振动的频率；$\omega t + \varphi$ 称为相位，$t = 0$ 时的相位 φ 称为初相.

在物理和工程技术的许多实际问题中，经常会遇到形如 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$（其中 A，ω，φ 都是常数，且 $A > 0$，$\omega > 0$）的函数.

● 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)\ (A > 0,\ \omega > 0)$ 的图象与 $y = \sin x$ 的图象有什么关系呢？

作函数 $y = \sin(x + 1)$ 和 $y = \sin x$ 的图象（图 1－3－11）.

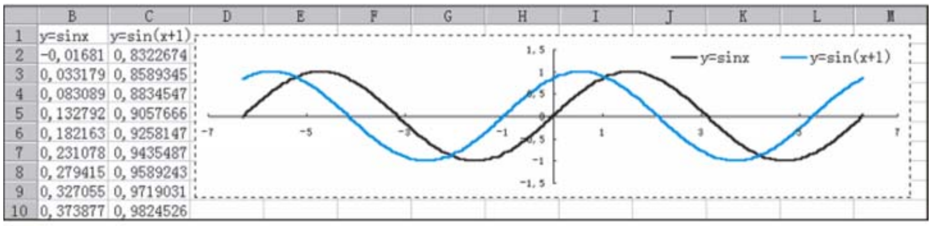


图 1－3－11

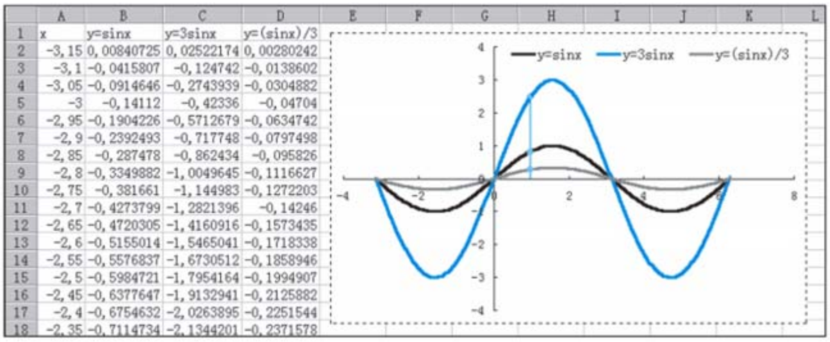
从图 1－3－11 中可以看出，函数 $y = \sin(x + 1)$ 的图象上横坐标为 $t - 1$ 的点的纵坐标，与函数 $y = \sin x$ 的图象上横坐标为 t 的点的纵坐标相同. 因此，函数 $y = \sin(x + 1)$ 的图象可以看做将函数 $y = \sin x$ 的图象上所有的点向左平移 1 个单位而得到.

思　考

函数 $y = \sin(x - 1)$ 的图象与函数 $y = \sin x$ 的图象有什么关系？

一般地，函数 $y = \sin(x + \varphi)$ 的图象可以看做将函数 $y = \sin x$ 的图象上所有的点向左（当 $\varphi > 0$）或向右（当 $\varphi < 0$）平移 $|\varphi|$ 个单位长度而得到.

作函数 $y=3\sin x$ 和 $y=\sin x$ 的图象(图 1-3-12).



	A	B	C	D
1	x	y=sinx	y=3sinx	y=(sinx)/3
2	-3,15	0,00840725	0,02522174	0,00280242
3	-3,1	-0,0415807	-0,124742	-0,0138602
4	-3,05	-0,0914646	-0,2743939	-0,0304882
5	-3	-0,14112	-0,42336	-0,04704
6	-2,95	-0,1904226	-0,5712679	-0,0634742
7	-2,9	-0,2392493	-0,717748	-0,0797498
8	-2,85	-0,287478	-0,862434	-0,095826
9	-2,8	-0,3349882	-1,0049645	-0,1116627
10	-2,75	-0,381661	-1,144983	-0,1272203
11	-2,7	-0,4273799	-1,2821396	-0,14246
12	-2,65	-0,4720305	-1,4160916	-0,1573435
13	-2,6	-0,5155014	-1,5465041	-0,1718338
14	-2,55	-0,5576837	-1,6730512	-0,1858946
15	-2,5	-0,5984721	-1,7954164	-0,1994907
16	-2,45	-0,6377647	-1,9132941	-0,2125882
17	-2,4	-0,6754632	-2,0263895	-0,2251544
18	-2,35	-0,7114734	-2,1344201	-0,2371578

图 1-3-12

从图 1-3-12 中可以看出,函数 $y=3\sin x$ 的图象上横坐标为 t 的点的纵坐标等于函数 $y=\sin x$ 的图象上横坐标为 t 的点的纵坐标的 3 倍. 因此,函数 $y=3\sin x$ 的图象可以看做函数 $y=\sin x$ 的图象上的所有点的纵坐标变为原来的 3 倍(横坐标不变) 而得到.

思　考

函数 $y=\dfrac{1}{3}\sin x$ 的图象与函数 $y=\sin x$ 的图象有什么关系?

由此,你能得到函数 $y=A\sin x$ 的哪些性质?

一般地,函数 $y=A\sin x(A>0$ 且 $A\neq 1)$ 的图象,可以看做将函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点的纵坐标变为原来的 A 倍(横坐标不变) 而得到.

作函数 $y=\sin 2x$ 和 $y=\sin x$ 的图象(图 1-3-13).

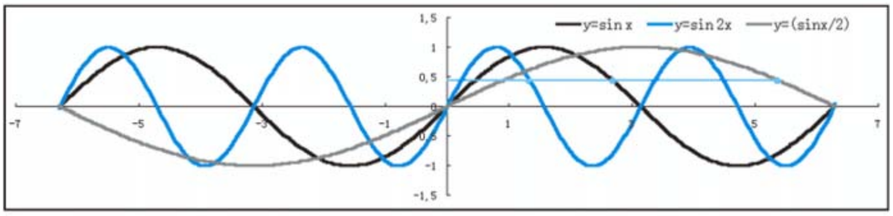


图 1-3-13

从图 1-3-13 中可以看出,函数 $y=\sin 2x$ 图象上横坐标为 $\dfrac{t}{2}$ 的点的纵坐标,与函数 $y=\sin x$ 的图象上横坐标为 t 的点的纵坐标相同. 因此,函数 $y=\sin 2x$ 的图象可以看做函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍(纵坐标不变)而得到.

思　考

函数 $y=\sin\dfrac{1}{2}x$ 的图象与函数 $y=\sin x$ 的图象有什么关系?

由此，你能得到函数 $y=\sin\omega x$ 的哪些性质？

一般地，函数 $y=\sin\omega x(\omega>0$ 且 $\omega\neq1)$ 的图象，可以看做将函数$y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的$\frac{1}{\omega}$倍(纵坐标不变)而得到.

最后，我们来研究函数 $y=\sin(2x+1)$ 和 $y=\sin2x$ 的图象之间的关系.

先作出它们的图象(图 1-3-14).

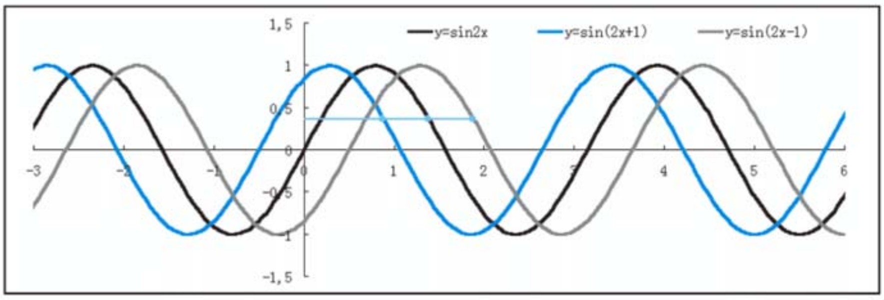


图 1-3-14

若记 $f(x)=\sin2x$，则 $f(x+1)=\sin(2x+2)$，$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=\sin(2x+1)$.

从图 1-3-14 中可以看出，函数 $y=\sin(2x+1)$ 的图象上横坐标为 $t-\frac{1}{2}$的点的纵坐标，与函数 $y=\sin2x$ 的图象上横坐标为t 的点的纵坐标相同. 因此函数 $y=\sin(2x+1)$的图象可以看做将函数 $y=\sin2x$ 的图象上所有的点向左平移$\frac{1}{2}$个单位长度而得到.

类似地，函数 $y=\sin(2x-1)$ 的图象可以看做将 $y=\sin2x$ 的图象上所有的点向右平移$\frac{1}{2}$个单位长度而得到.

一般地，函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,\ \varphi\neq0)$ 的图象，可以看做将函数 $y=\sin\omega x$ 的图象上所有的点向左(当 $\varphi>0$ 时)或向右(当 $\varphi<0$ 时)平移 $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$ 个单位长度而得到.

思　考

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\ \omega>0)$ 的图象可以由正弦曲线经过哪些图象变换而得到?画出图象变换的流程图.

例 1　若函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$表示一个振动量：

(1) 求这个振动的振幅、周期、初相；

(2) 不用计算机和图形计算器，画出该函数的简图.

解　(1) 函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的振幅为 3，初相为 $-\frac{\pi}{3}$，周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$.

先令 $2x-\frac{\pi}{3}=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$，然后求出 x 和 y.

（2）方法 1　先用“五点法”作出一个周期的图象，列表：

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$
$2x-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	3	0	-3	0

描点画图，然后由周期性，通过向左、右平移（每次 π 个单位）得整个图象（图 1－3－15）.

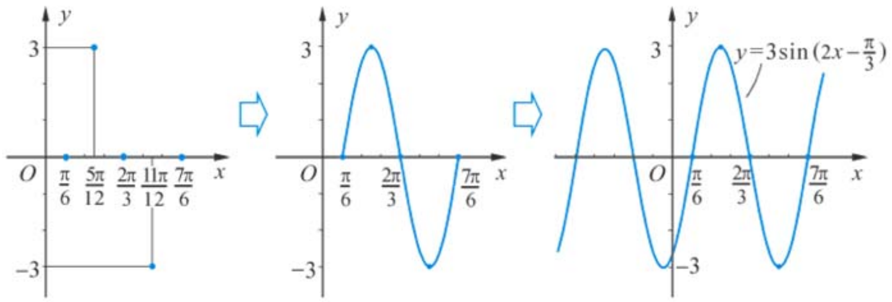


图 1－3－15

$y=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 单位长度后所得图象的表达式为 $y=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

方法 2　作出正弦曲线，并将曲线上每一点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），得到函数 $y=\sin 2x$ 的图象；再将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象；再将函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上每一点的纵坐标变为原来的 3 倍（横坐标不变），即可得函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象（图 1－3－16）.

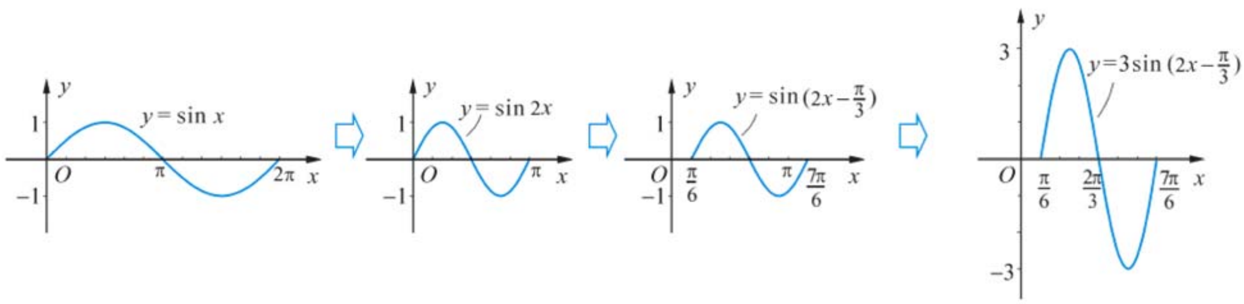


图 1－3－16

上述图象变换的顺序如下：

$$y=\sin x\to y=\sin 2x\to y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\to y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right).$$

方法 3　作出正弦曲线，并将其向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象；再将函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上的每一

点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），得到函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象；再将函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上的每一个点的纵坐标变为原来的 3 倍（横坐标不变），即可得到函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象（图 1－3－17）.

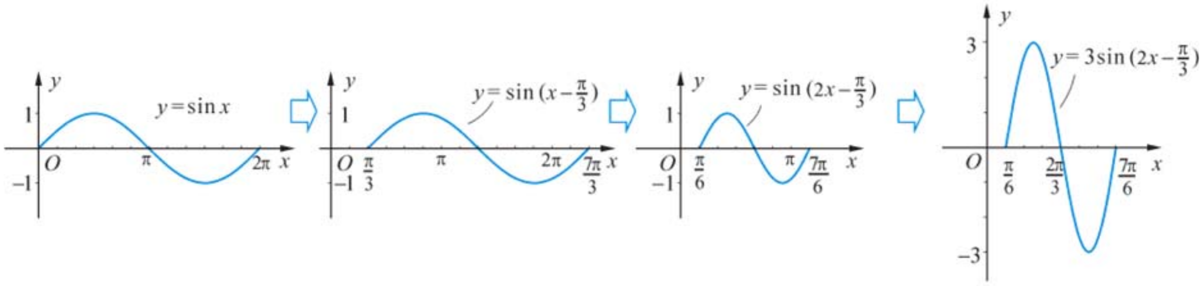


图 1－3－17

上述图象变换的顺序如下：

$$y=\sin x\rightarrow y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\rightarrow y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\rightarrow y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right).$$

Excel

在计算机上，利用 Excel 软件：

（1）作出 $f(x)=2\cos x$，$g(x)=\sin 2x$，$h(x)=2\cos x+\sin 2x$ 的图象，并判断函数 $h(x)$ 是否为周期函数；

（2）作出 $f(x)=\cos 2\pi x$，$g(x)=-\cos 2\pi x$，$h(x)=\cos 2\pi x\cos 16\pi x$ 的图象.

我们在 Excel 中作出（1）中的函数在区间 $[-2,\ 12]$ 上的图象，步骤如下：

① 在单元格 A1，A2 内分别输入－2，－1.9，选中 A1，A2 后拖拽填充柄至单元格的值是 12 为止；

② 在 B1，C1，D1 内分别输入函数表达式“＝2＊cos（A1）”，“＝sin（2＊A1）”，“＝B1＋C1”，依次双击 B1，C1，D1 的填充柄，即得到相应的函数值；

③ 插入“图表”，选择“无数据点平滑散点图”，作出这三个函数的图象（图 1－3－18）.

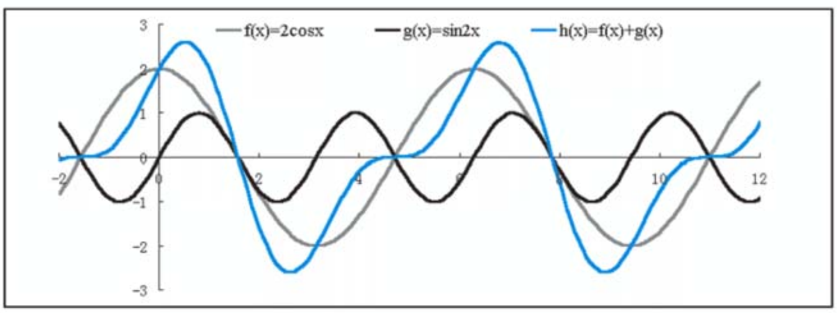


图 1－3－18

从图中可以看出，函数 $h(x)$ 仍是周期函数，2π 是它的一个周期.

阅　读

一般地，由下列函数

$$1,\ \cos kx,\ \cos 2kx,\ \cos 3kx,\ \ldots$$

$$\sin kx,\ \sin 2kx,\ \sin 3kx,\ \ldots$$

中若干个函数的和所得到的函数仍是周期函数. 法国数学家傅立叶(J. B. J. Fourier)发现，几乎所有的周期函数都能用这些函数的和(一般为无穷和)来表示.

(2)中的函数对 x 值的变化很敏感，故取点可密一些. 如 A1，A2 取 -1，-0.99，然后仿上作出

$$f(x)=\cos 2\pi x,\ g(x)=-\cos 2\pi x,\ h(x)=\cos 2\pi x\cos 16\pi x$$

的图象（图 1－3－19）.

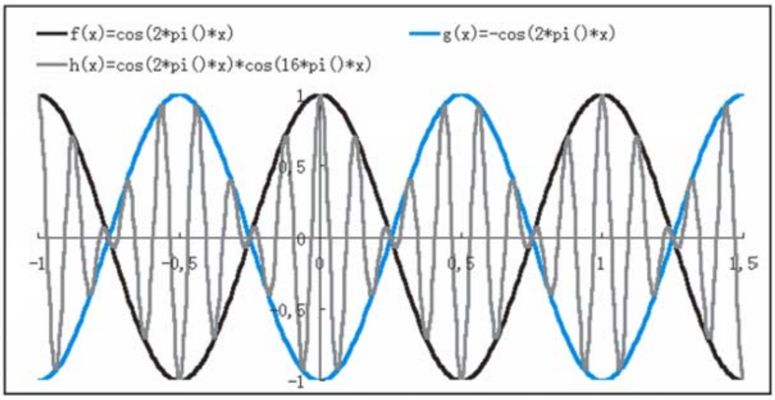


图 1－3－19

从图中可以发现，函数 $h(x)$ 的图象夹在两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象之间.

无线电波是将控制信号（带有信息的低频信号）叠加在载波上传播的（图 1－3－20），主要有调幅 AM(amplitude modulation)和调频

在学习物理中的相关内容（如简谐运动、波的传播、交流电）时，注意利用三角函数知识来分析和理解.

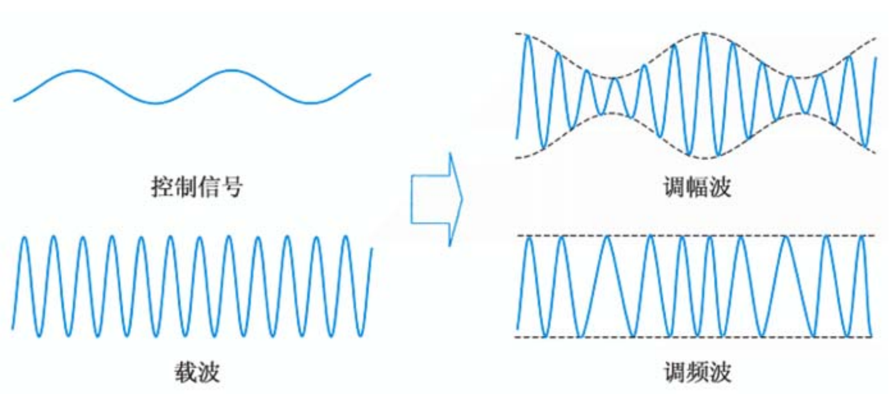


图 1－3－20

FM(frequency modulation)两种形式. 调幅广播,控制信号改变(调制)载波的振幅,而载波的频率不变. 调频广播,控制信号改变(调制)载波的频率,但载波的振幅保持不变(图 1-3-20).

练 习

1. 已知函数 $y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)$ 的图象为 C.

(1) 为了得到函数 $y=3\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)$ 的图象,只需把 C 上的所有点________;

(2) 为了得到函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$ 的图象,只需把 C 上的所有点________;

(3) 为了得到函数 $y=4\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)$ 的图象,只需把 C 上所有点________.

2. 把函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位,所得到的图象的函数解析式为________,再将图象上的所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍(纵坐标不变),则所得到的图象的函数解析式为__________.

3. 要得到函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象,只需将函数 $y=3\sin 2x$ 的图象(　　).

A. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位　　B. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位

C. 向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位　　D. 向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位

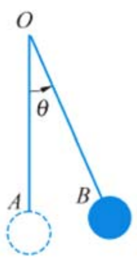
4. 函数 $y=\frac{2}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的振幅、周期、初相各是多少?它的图象与正弦曲线有什么关系?

5. 一个单摆如图所示,以 OA 为始边,OB 为终边的角 $\theta(-\pi<\theta<\pi)$ 与时间 t(s) 的函数满足:$\theta=\frac{1}{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)$.

(1) $t=0$ 时,角 θ 是多少?

(2) 单摆频率是多少?

(3) 单摆完成 5 次完整摆动共需多少时间?



(第 5 题)

6. 画出函数 $y=2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ 的简图,并指出它可由函数 $y=\sin x$ 的图象经过哪些变换而得到. 画出图象变换流程图.

1.3.4　三角函数的应用

三角函数能够模拟许多周期现象,因此在解决实际问题中有着广泛的应用.

例 1　在图 1-3-21 中,点 O 为做简谐运动的物体的平衡位置,取

图 1-3-21

向右的方向为物体位移的正方向，若已知振幅为 3 cm，周期为3 s，且物体向右运动到距平衡位置最远处时开始计时.

(1) 求物体对平衡位置的位移 x(cm)和时间 t(s)之间的函数关系；

(2) 求该物体在 $t=5$ s 时的位置.

解　(1) 设 x 和 t 之间的函数关系为

$$x=3\sin(\omega t+\varphi)(\omega>0,\ 0\leqslant\varphi<2\pi).$$

则由 $T=\frac{2\pi}{\omega}=3$，可得 $\omega=\frac{2\pi}{3}$.

当 $t=0$ 时，有$x=3\sin\varphi=3$，即 $\sin\varphi=1$.

又 $0\leqslant\varphi<2\pi$，故可得 $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

所以所求函数关系为 $x=3\sin\left(\frac{2\pi}{3}t+\frac{\pi}{2}\right)$，即 $x=3\cos\frac{2\pi}{3}t$.

(2) 令 $t=5$，得 $x=3\cos\frac{10\pi}{3}=-1.5$，故该物体在 $t=5$ s 时的位置是在 O 点的左侧且距 O 点 1.5 cm 处.

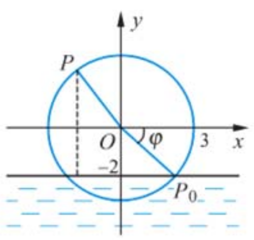


图 1-3-22

例 2　一半径为 3 m 的水轮如图 1-3-22 所示，水轮圆心 O 距离水面 2 m，已知水轮每分钟转动 4 圈，如果当水轮上点 P 从水中浮现时(图中点 P_0)开始计算时间.

(1) 将点 P 距离水面的高度 z(m)表示为时间 t(s)的函数；

(2) 点 P 第一次到达最高点大约要多长时间？

解　(1) 不妨设水轮沿逆时针方向旋转，如图 1-3-22，建立平面直角坐标系.

设角 $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi<0\right)$ 是以 Ox 为始边，OP_0为终边的角.

由 OP 在 t s 内所转过的角为 $\left(\frac{4\times2\pi}{60}\right)t=\frac{2\pi}{15}t$，可知以 Ox 为始边，OP 为终边的角为 $\frac{2\pi}{15}t+\varphi$，故 P 点纵坐标为 $3\sin\left(\frac{2\pi}{15}t+\varphi\right)$，则

$$z=3\sin\left(\frac{2\pi}{15}t+\varphi\right)+2.$$

当 $t=0$ 时，$z=0$，可得 $\sin\varphi=-\frac{2}{3}$.

因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$，所以$\varphi\approx-0.73$，故所求函数关系式为

$$z=3\sin\left(\frac{2\pi}{15}t-0.73\right)+2.$$

(2) 令 $z=3\sin\left(\frac{2\pi}{15}t-0.73\right)+2=5$，得 $\sin\left(\frac{2\pi}{15}t-0.73\right)=1$.

取 $\frac{2\pi}{15}t-0.73=\frac{\pi}{2}$，解得 $t\approx 5.5$.

故点 P 第一次到达最高点大约需要 5.5 s.

例 3 海水受日月的引力，在一定的时候发生涨落的现象叫潮汐，一般的早潮叫潮，晚潮叫汐. 在通常情况下，船在涨潮时驶进航道，靠近船坞；卸货后落潮时返回海洋. 下面给出了某港口在某季节每天几个时刻的水深.

时刻	水深/m	时刻	水深/m	时刻	水深/m
0:00	5.0	9:00	2.5	18:00	5.0
3:00	7.5	12:00	5.0	21:00	2.5
6:00	5.0	15:00	7.5	24:00	5.0

(1) 选用一个三角函数来近似描述这个港口的水深与时间的函数关系，并给出在整点时的水深的近似数值；

(2) 一条货船的吃水深度(船底与水面的距离)为 4 m，安全条例规定至少要有 1.5 m 的安全间隙(船底与海底的距离)，该船何时能进入港口？在港口能呆多久？

(3) 若船的吃水深度为 4 m，安全间隙为 1.5 m，该船在 2:00 开始卸货，吃水深度以每小时 0.3 m 的速度减少，那么该船在什么时间必须停止卸货，将船驶向较深的水域？

分析 (1) 考察数据，可选用正弦函数，再利用待定系数法求解；

(2) 在涉及三角不等式时，可利用图象求解.

解 (1) 可设所求函数为 $f(x)=A\sin\omega x+k$，由已知数据求得

$$A=2.5, k=5, T=12, \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{6},$$

故
$$f(x)=2.5\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)+5.$$

在整点时的水深近似为：1:00，5:00，13:00，17:00 为 6.3 m；2:00，4:00，14:00，16:00 为 7.2 m；7:00，11:00，19:00，23:00 为 3.7 m；8:00，10:00，20:00，22:00 为 2.8 m.

(2) 由 $2.5\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)+5\geqslant 5.5$，得 $\sin\frac{\pi}{6}x\geqslant 0.2$，画出 $y=\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$ 的图象(图 1-3-23)，由图象可得

$$0.4\leqslant x\leqslant 5.6 \text{ 或 } 12.4\leqslant x\leqslant 17.6.$$

故该船在 0:24 至 5:36 和 12:24 至 17:36 期间可以进港，在港口能呆 5.2 h.

在 Excel 中，计算 π 值时，应使用“pi()”函数. 为便于观察，在“图表”选项中选择“网格线”.

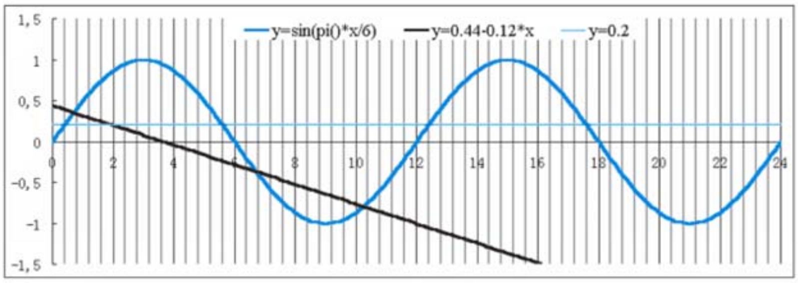


图 1-3-23

(3) 若 $2\leqslant x\leqslant 24$，x 时刻的吃水深度为 $h(x)=4-0.3(x-2)$，由 $f(x)\geqslant h(x)+1.5$，得

$$\sin\frac{\pi}{6}x\geqslant 0.44-0.12x.$$

画出 $y=\sin\frac{\pi}{6}x$ 和 $y=0.44-0.12x$ 的图象(图 1-3-23)，由图象可知当 $x=6.7$ 时，即 6:42 时，该船必须停止卸货，驶向较深的水域.

探　究

根据参考资料，找出本地去年不同日期的日出和日落时间，并根据这些数据求出能近似地刻画日出和日落规律的函数模型.

练　习

1. 在图 1-3-21 中，点 O 为做简谐运动的物体的平衡位置，取向右的方向为物体位移的正方向. 若已知振幅为 5 cm，周期为 4 s，且物体向右运动到平衡位置时开始计时.

(1) 求物体对平衡位置的位移 x(cm)和时间 t(s)之间的函数关系；

(2) 求该物体在 $t=7.5$ s 时的位置.

2. 某城市一年中 12 个月的月平均气温与月份数之间的关系可以近似地用一个三角函数来描述. 已知 6 月份的月平均气温最高，为 29.45℃，12 月份的月平均气温最低，为 18.3℃. 求出这个三角函数的表达式，并画出该函数的图象.

3. 某港口相邻两次高潮发生时间间隔12 h20 min，低潮时入口处水的深度为 2.8 m，高潮时为 8.4 m，一次高潮发生在 10 月 3 日 2:00.

(1) 若从 10 月 3 日 0:00 开始计算时间，选用一个三角函数来近似描述这个港口的水深 d(m)和时间 t(h)之间的函数关系；

(2) 求 10 月 5 日 4:00 水的深度；

(3) 求 10 月 3 日吃水深度为 5 m 的轮船能进入港口的时间.

习题 1.3

感受・理解

1. 求下列函数的周期：

(1) $y=\sin\frac{3}{4}x$；　　(2) $y=\cos 4x$；

(3) $y=3\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$； (4) $y=2\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

2. 画出下列函数在长度为一个周期的闭区间上的简图：

(1) $y=\cos x+2$； (2) $y=4\sin x$；

(3) $y=\frac{1}{2}\cos 3x$； (4) $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

3. 确定下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{1-\cos x}$； (2) $y=\sqrt{2\sin x}$；

(3) $y=-\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2$.

4. 求下列函数的最大值、最小值以及使函数取得这些值的 x 的集合：

(1) $y=1-\frac{1}{2}\cos x$； (2) $y=3\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$.

5. 利用函数的性质，比较下列各题中两个三角函数值的大小：

(1) $\sin 103°45'$ 与 $\sin 164°30'$； (2) $\cos\left(-\frac{47}{4}\pi\right)$与 $\cos\left(-\frac{44}{9}\pi\right)$；

(3) $\sin 508°$ 与 $\sin 144°$； (4) $\cos 760°$ 与 $\cos(-770°)$；

(5) $\tan\left(-\frac{\pi}{5}\right)$与 $\tan\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$； (6) $\tan\frac{7\pi}{8}$ 与 $\tan\frac{\pi}{16}$.

6. 求下列函数的单调区间：

(1) $y=1+\sin x$； (2) $y=-\cos x$.

7. 画出函数 $y=2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$在长度为一个周期的闭区间上的图象.

8. 不画图，写出下列函数的周期、振幅和初相，并说明这些函数的图象可由正弦曲线经过怎样的变化得出：

(1) $y=8\sin\left(\frac{1}{4}x-\frac{\pi}{8}\right)$； (2) $y=\frac{1}{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{7}\right)$.

9. 电流 I(A)随时间 t(s)变化的关系式是 $I=A\sin\omega t$，$t\in[0,+\infty)$. 设 $\omega=100\pi$，$A=5$.

(1) 求电流 I 变化的周期和频率；

(2) 当 $t=0$，$\frac{1}{200}$，$\frac{1}{100}$，$\frac{3}{200}$，$\frac{1}{50}$ 时，求电流 I；

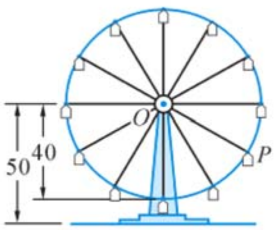
(3) 画出电流 I(A) 随时间 t(s) 变化的函数图象.

10. 一根长 l cm 的线，一端固定，另一端悬挂一个小球，小球摆动时，离开平衡位置的位移 s(cm)和时间 t(s)的函数关系式是

$$s=3\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+\frac{\pi}{3}\right),\ t\in[0,+\infty).$$

(1) 求小球摆动的周期；

(2) 已知 $g=980\ \text{cm/s}^2$，要使小球摆动的周期是 1 s，线的长度应当是多少？(精确到 0.1 cm，π 取 3.14)



(第 11 题)

11. 如图，摩天轮的半径为 40 m，点 O 距地面的高度为 50 m，摩天轮做匀速转动，每 3 min 转一圈，摩天轮上的点 P 的起始位置在最低点处.

(1) 试确定在时刻 t(min)时点 P 距离地面的高度；

(2) 在摩天轮转动的一圈内，有多长时间点 P 距离地面超过 70 m？

12. 观察正弦曲线和余弦曲线，分别写出满足下列条件的 x 的集合：

(1) $\sin x>0$；　　(2) $\cos x<0$.

思考・运用

13. 求下列函数的单调区间：

(1) $y=3\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$；　　(2) $y=\cos\left(\frac{\pi}{5}-2x\right)$.

健康成年人的收缩压和舒张压一般为120～140 mmHg和60～90 mmHg.

14. 心脏跳动时，血压在增加或减小. 血压的最大值、最小值分别称为收缩压和舒张压，血压计上的读数就是收缩压和舒张压，读数 120/80 mmHg 为标准值.

设某人的血压满足函数式 $p(t)=115+25\sin(160\pi t)$，其中 $p(t)$ 为血压(mmHg)，t 为时间(min)，试回答下列问题：

(1) 求函数 $p(t)$ 的周期；

(2) 此人每分钟心跳的次数；

(3) 画出函数 $p(t)$ 的草图；

(4) 求出此人的血压在血压计上的读数，并与标准值比较.

探究・拓展

15. 下表是某地一年中 10 d(天)的白昼时间.

日 期	1 月 1 日	2 月 28 日	3 月 21 日	4 月 27 日	5 月 6 日
小时/h	5.59	10.23	12.38	16.39	17.26
日 期	6 月 21 日	8 月 14 日	9 月 23 日	10 月 25 日	11 月 21 日
小时/h	19.40	16.34	12.01	8.48	6.13

(1) 以日期在 365 d(天)中的位置序号为横坐标，白昼时间为纵坐标，描出这些数据的散点图；

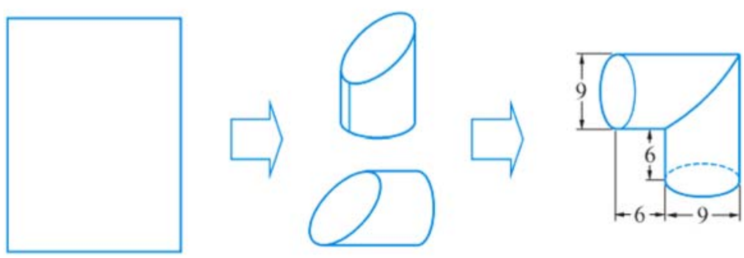
(2) 选用一个三角函数来近似描述白昼时间与日期序号之间的函数关系；

(3) 用(2)中的函数模型估计该地 7 月 8 日的白昼时间.

实习作业

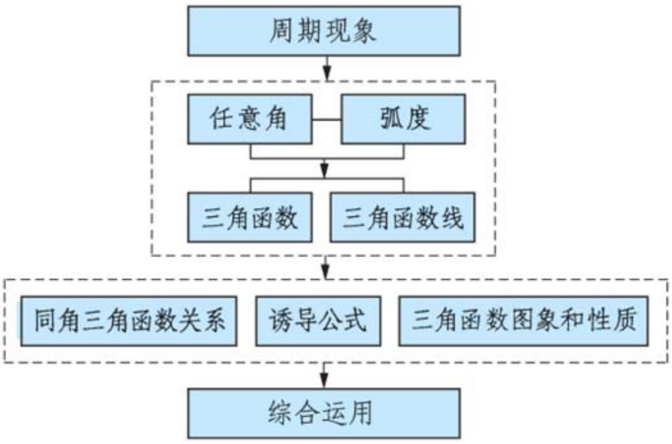
请同学们每三人一组，通过实验、猜想、探索和研讨，共同完成下面的课题，并写出课题研究报告，与其他小组进行交流.

烟筒弯头是由两个圆柱形的烟筒焊在一起做成的，现在要用矩形铁片做成一个直角烟筒弯头(如下图，单位：cm)，不考虑焊接处的需要，选用的矩形铁片至少应满足怎样的尺寸？请你设计出一个最合理的裁剪方案.(在矩形铁片上画出的裁剪线应是什么图形？)



本章回顾

在本章中，我们通过旋转将角的概念推广到任意角，探讨了角的另一种度量制度——弧度制，在此基础上，研究了任意角的三角函数、同角三角函数关系、诱导公式、三角函数的图象和性质，最后研究了三角函数的应用.



“依性作图，以图识性”是数形结合思想的重要体现. 在本章中，我们先探讨了三角函数的最重要性质——周期性，然后利用周期性画出了正弦、余弦和正切函数的图象，根据图象得出了这些函数的一些基本性质.

三角函数在本质上是对单位圆圆周上一点运动的“动态描述”，它的种种性质和公式都是和单位圆的几何性质密切关联的，这是研究三角函数的重要思想和方法. 在解决三角函数的有关问题中，应自觉运用单位圆中的三角函数线和三角函数的图象，以形助数，数形结合.

复 习 题

感受·理解

1. 写出与下列各角终边相同的角的集合 S，并且把 S 中适合不等式 $-2\pi\leqslant\beta<4\pi$ 的元素写出来：

(1) 4；　　(2) $-\dfrac{2}{3}\pi$；

(3) $\dfrac{12}{5}\pi$；　　(4) 0.

2. 在半径等于 15 cm 的圆中，一扇形的弧所对的圆心角为 54°，求这个扇形的周长与面积（π 取 3.14，计算结果保留两位有效数字）.

3. 计算：

(1) $\sin\dfrac{25\pi}{6}+\cos\dfrac{25\pi}{3}+\tan\left(-\dfrac{25}{4}\pi\right)$；

(2)（使用计算器）$\sin 2+\cos 3+\tan 4$.

4. 已知 $\cos\varphi=\dfrac{1}{4}$，求 $\tan\varphi$.

5. 已知 $\sin(\pi+\alpha)=-\dfrac{1}{2}$，计算：

(1) $\cos(2\pi-\alpha)$；　　(2) $\tan(\alpha-7\pi)$.

6. 已知 $\tan\alpha=3$，计算：

(1) $5\cos\alpha+3\sin\alpha$；　　(2) $\sin\alpha\cos\alpha$.

7. 化简：$\dfrac{\sqrt{1-2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}}{\cos 10^\circ-\sqrt{1-\cos^2 170^\circ}}$.

8. 求证：

(1) $2(1-\sin\alpha)(1+\cos\alpha)=(1-\sin\alpha+\cos\alpha)^2$；

(2) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta=1$.

9. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\tan\dfrac{x}{2}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{1-\tan x}$.

10. 求下列函数的最大值、最小值，并求使函数取得最大值、最小值的 x 的集合：

(1) $y=3-2\cos x$；　　(2) $y=2\sin\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

11. 下列函数中哪些是奇函数？哪些是偶函数？

(1) $y=x^2+\cos x$；　　(2) $y=x^2\sin x$.

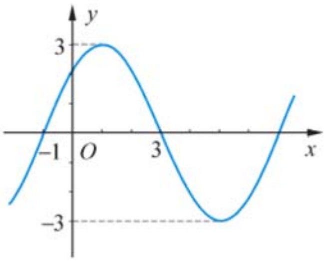
12. 求下列函数的单调区间：

(1) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$；

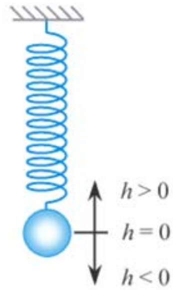
(2) $y=\cos 2x$；

(3) $y=\tan(1-x)$.

13. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,\ \varphi\in[0,\ 2\pi))$ 的图象如图所示，试求该函数的振幅、频率和初相.



（第 13 题）



（第 14 题）

14. 如图，弹簧挂着的小球做上下振动，它在 t s 时相对于平衡位置（静止时的位置）的高度 h(cm) 由下列关系式决定：

$$h=2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right),\ t\in[0,+\infty).$$

以 t 为横坐标，h 为纵坐标，画出这个函数在长度为一个周期的闭区间上的简图，并且回答下列问题：

(1) 小球在开始振动时（即 $t=0$ 时）的位置在哪里？

(2) 小球的最高点和最低点与平衡位置的距离分别是多少？

(3) 经过多少时间小球往复振动一次（周期）？

(4) 每秒钟小球能够振动多少次（频率）？

15. 在一次气象调查中，发现某城市的温度 θ(℃) 的波动近似地按照规则 $\theta=25+6\sin\frac{\pi}{12}t$，其中 t(h) 是从某日 9:00 开始计算的时间，且 $t\leqslant 24$.

(1) 画出温度随时间波动的图象；

(2) 利用函数图象确定最高和最低温度；

(3) 最高和最低温度在什么时候出现？

(4) 在什么时候温度为：① 27℃？ ② 20℃？

思考・运用

16. 已知 $x\cos\theta=a$，$y=b\tan\theta(a\neq 0,\ b\neq 0)$，求证：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

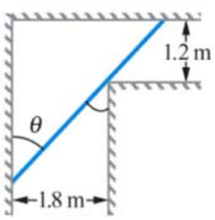
17. 已知 $\tan\theta+\sin\theta=a$，$\tan\theta-\sin\theta=b$，求证：$(a^2-b^2)^2=16ab$.

18. 设函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\ \omega>0,\ |\varphi|<\pi)$ 最高点 D 的坐标为 $(2,\sqrt{2})$. 由最高点运动到相邻的最低点时，函数曲线与 x 轴的交点为 $(6,0)$.

(1) 求 A，ω 和 φ 的值；

(2) 求出该函数的频率和单调区间.

探究・拓展



（第 19 题）

19. 一铁棒欲通过如图所示的直角走廊，试回答下列问题：

(1) 证明棒长 $L(\theta)=\frac{9}{5\sin\theta}+\frac{6}{5\cos\theta}$；

(2) 当 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，作出上述函数的图象（可用计算器或计算机）；

(3) 由 (2) 中的图象求 $L(\theta)$ 的最小值（用计算器或计算机）；

(4) 解释 (3) 中所求得的 L 是能够通过这个直角走廊的铁棒的长度的最大值.

20. （阅读题）计算器是如何计算 $\sin x$，$\cos x$，e^x，$\ln x$，$\sqrt{x}$ 等函数值的？计算

器使用的是数值计算法，其中一种方法是用容易计算的多项式近似地表示这些函数，通过计算多项式的值求出原函数的值，如

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

（其中 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$）

英国数学家泰勒(B. Taylor，1685～1731)发现了这些公式. 同时也可以知道，右边的项用得越多，计算得到的 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的值也就越精确. 例如，我们用前三项计算 $\sin 0.9$，就得到

$$\sin 0.9 \approx 0.9 - \frac{(0.9)^3}{3!} + \frac{(0.9)^5}{5!} \approx 0.783\,420\,75.$$

像这些公式已被编入计算器内，计算器利用足够多的项就可确保其显示值是精确的.

试用你的计算器计算 $\sin 0.9$，并与上述结果进行比较.

链 接

反三角函数

仔细观察，可以发现计算器上有按键 $\boxed{\sin^{-1}}$ $\boxed{\cos^{-1}}$ $\boxed{\tan^{-1}}$，你知道如何使用它们吗？由这些键可求出某数的反三角函数值，那么，什么是反三角函数呢？

我们知道：一个函数有反函数的条件为该函数的图象与任意直线 $y=a$ 的交点不超过一个. 回顾正弦、余弦、正切函数的图象，可以发现这三种函数都不具备上述条件，显然对其中每一种函数，均存在直线 $y=a$ 与函数图象交于无穷多个点，例如，直线 $y=\frac{1}{2}$ 与正弦、余弦、正切函数图象的每一个都有无穷多个交点. 因此，正弦、余弦、正切函数均不存在反函数.

如果我们改变这些三角函数的定义域，使其满足：对于每一个 y 值，在新的函数定义域内仅有一个 x 值使得 $f(x)=y$，这样的函数就有反函数. 如何分别选定正弦、余弦、正切函数的新定义域呢？新的定义域一般应满足下面三个条件：

(1) 这一定义域应当包括 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 之间的角，因为这些是直角三角形中锐角的弧度数.

(2) 在这一定义域内，能取遍值域内的每一个值，而且每个值只能取值一次.

(3) 如果可能，在此定义域内函数图象应该不间断(连续).

根据三角函数的图象和性质，我们通常选择 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，$[0, \pi]$，$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 分别为正弦、余弦、正切函数的新定义域，如图 1 - 3 - 24，在这些新定义域内，相应的三角函数有反函数.

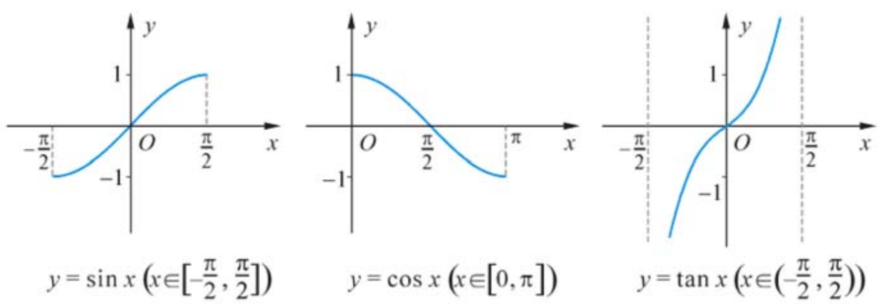


图 1 - 3 - 24

(1) 函数 $y=\sin x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的反函数叫做反正弦函数，

记作

$$y=\arcsin x,\ x\in[-1,\ 1].$$

(2) 函数 $y=\cos x(x\in[0,\ \pi])$ 的反函数叫做反余弦函数,记作

$$y=\arccos x,\ x\in[-1,\ 1].$$

(3) 函数 $y=\tan x\left(x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$的反函数叫做反正切函数,记作

$$y=\arctan x,\ x\in\mathbf{R}.$$

由互为反函数的函数图象关于直线 $y=x$ 对称,可得反正弦、反余弦、反正切函数的图象(图 1-3-25).

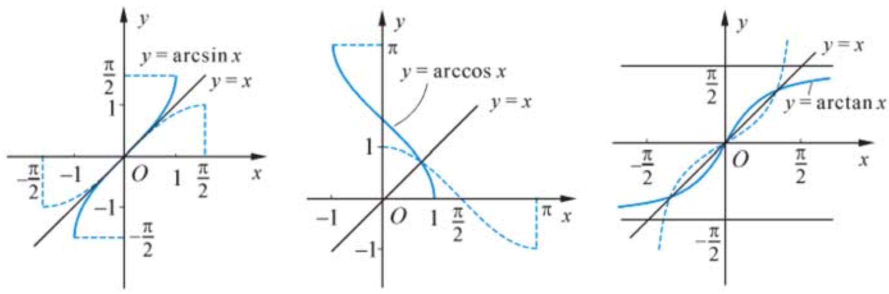


图 1-3-25

你能根据反三角函数的图象得出它们的有关性质吗?

反三角函数和我们前面学习过的指数函数、对数函数、幂函数、三角函数一样,都属于基本初等函数.

CALCULATOR

反三角函数的函数值为角度,单位可以是弧度、度等.

计算 $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$:

(1) 按 MODE MODE 1 键,设置以度为单位显示结果;

(2) 按 SHIFT $\cos^{-1}$ ($\sqrt{\ }$ 2 ÷ 2) = 键,得

$$\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}=45°.$$

计算 $\arcsin 0.8$:

(1) 按 MODE MODE 2 键,设置以弧度为单位显示结果;

(2) 按 SHIFT $\sin^{-1}$ 0 . 8 = 键,得 $\arcsin 0.8\approx 0.93\mathrm{rad}$.

Mathematics compares the most diverse phenomena, and discovers the secret analogies which unite them.

— Joseph Fourier

在第 1 章中，我们曾用有序数对来表示圆周上的一点 P. 对于给定的点 O，点 P 的位置可由 OP 的方向和 OP 的大小确定.

在生活中，我们也会遇到这样的量，例如，

飞机从东向西位移 10 000 km，

飞机每小时向西北方向飞行 900 km，

提起某物体需要 300 kg 向上的力，

……

- 用什么样的数学模型来刻画位移、速度、力这样的量？
- 这个数学模型有什么性质与应用？

2.1 向量的概念及表示

湖面上有三个景点 O,A,B,如图 2-1-1 所示. 一游艇将游客从景点 O 送至景点 A,半小时后,游艇再将游客送至景点 B. 从景点 O 到景点 A 有一个位移,从景点 A 到景点 B 也有一个位移.

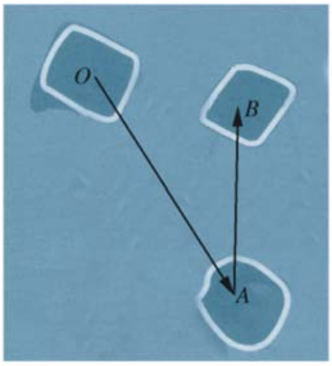


图 2-1-1

● 位移和距离这两个量有什么不同?

在现实生活中,有些量(如距离、身高、质量等)在取定单位后只用一个实数就能表示,我们称之为数量. 而另外一些量(如位移、速度、加速度、力等)必须用数值和方向才能表示.

我们把既有大小又有方向的量称为向量(vector).

向量常用一条有向线段来表示,有向线段的长度表示向量的大小,箭头所指的方向表示向量的方向. 以 A 为起点、B 为终点的向量记为$\overrightarrow{AB}$. 向量也可用小写字母 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 来表示(图 2-1-2).

用小写字母 a 表示向量时,印刷用粗体 $\boldsymbol{a}$,书写用 $\vec{a}$.

图 2-1-2

向量$\overrightarrow{AB}$的大小称为向量的长度(或称为模),记作$|\overrightarrow{AB}|$.

长度为 0 的向量称为零向量(null vector),记作 $\mathbf{0}$. 长度等于 1 个单位长度的向量,叫做单位向量(unit vector).

思　考

平面直角坐标系内,起点在原点的单位向量,它们终点的轨迹是什么图形?

方向相同或相反的非零向量叫做平行向量(parallel vectors). 在图 2-1-3 中,向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 是一组平行向量. 向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 平行,记作 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$. 我们规定零向量与任一向量平行.

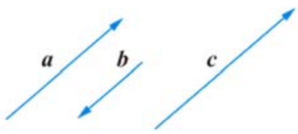


图 2-1-3

图 2-1-4

长度相等且方向相同的向量叫做相等向量(equal vectors). 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 如图 2-1-4,在 ▱$ABCD$ 中,向量$\overrightarrow{AB}$ 和$\overrightarrow{DC}$ 方向相同且长度相等,所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

本章学习的向量都是平面内的自由向量. 它们仅由方向和大小确定,而与起点位置无关.

由此可知,将一个向量平移后所得的向量与原向量是相等的. 图 2-1-5 中,向量$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$两两平行,可以通过平移使得$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$落在同一直线上. 所以,任意一组平行向量都可以平移到同一条直线上,故平行向量又称为共线向量(collinear vectors).

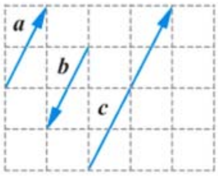


图 2-1-5

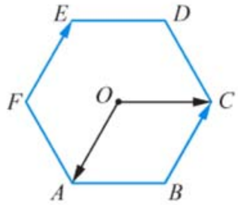


图 2-1-6

例 1 已知 O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心,在图 2-1-6 所标出的向量中:

(1) 试找出与$\overrightarrow{FE}$共线的向量;

(2) 确定与$\overrightarrow{FE}$相等的向量;

(3) $\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{BC}$相等吗?

解 (1) 与$\overrightarrow{FE}$共线的向量有$\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{OA}$.

(2) $\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{FE}$长度相等且方向相同,故 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}$.

(3) 虽然 $\overrightarrow{OA}\parallel\overrightarrow{BC}$,且 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{BC}|$,但它们方向相反,故这两个向量并不相等.

我们把与向量 $\boldsymbol{a}$ 长度相等,方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量(opposite vectors),记作$-\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}$ 与$-\boldsymbol{a}$ 互为相反向量. 并且规定零向量的相反向量仍是零向量. 于是,对任一向量 $\boldsymbol{a}$ 有

$$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}.$$

例 2 在图 2-1-7(1)中的 4×5 方格纸中有一个向量$\overrightarrow{AB}$,分别以图中的格点为起点和终点作向量,其中与$\overrightarrow{AB}$相等的向量有多少个?与$\overrightarrow{AB}$长度相等的共线向量有多少个?($\overrightarrow{AB}$除外)

分析 与$\overrightarrow{AB}$相等的向量应当满足"等长且同向",首先要确定这些向量的起点. 在方格纸格点中,除去点 A 外,符合题意的起点还有 7 个(如图 2-1-7(2)). 与$\overrightarrow{AB}$长度相等的共线向量除了与$\overrightarrow{AB}$方向相同的向量外,还有与$\overrightarrow{AB}$方向相反的向量.

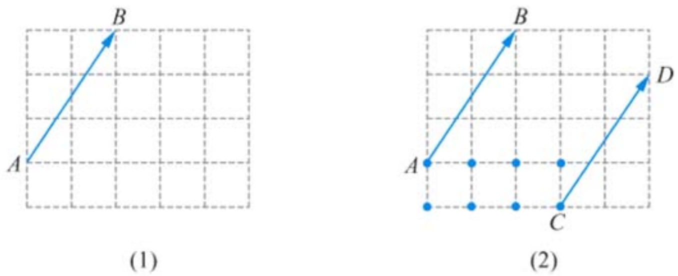


图 2-1-7

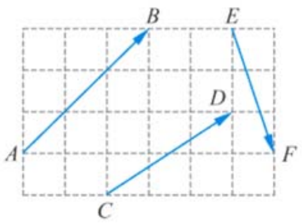
解　当向量$\overrightarrow{CD}$的起点 C 是图 2-1-7(2)中所圈的格点时，可以作出与$\overrightarrow{AB}$相等的向量. 这样的格点共有 8 个，除去点 A 外，还有 7 个，所以共有 7 个向量与$\overrightarrow{AB}$相等.

与$\overrightarrow{AB}$长度相等的共线向量(除$\overrightarrow{AB}$外)共有

$$7\times2+1=15(\text{个}).$$

练　习

1. 在质量、重力、速度、加速度、身高、面积、体积这些量中，哪些是数量？哪些是向量？
2. 在下列结论中，哪些是正确的？
   (1) 若两个向量相等，则它们的起点和终点分别重合；
   (2) 模相等的两个平行向量是相等的向量；
   (3) 若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都是单位向量，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；
   (4) 两个相等向量的模相等.
3. 设 O 是正$\triangle ABC$ 的中心，则向量$\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{BO}$，$\overrightarrow{CO}$是(　　).
   A. 相等向量　　B. 模相等的向量
   C. 共线向量　　D. 共起点的向量
4. 写出图中所示各向量的长度(小正方形的边长为 1).

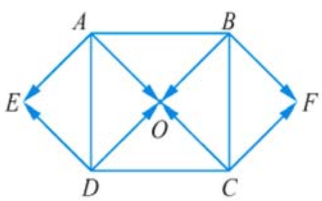


(第 4 题)

习题 2.1

感受・理解

1. 已知 O 是正方形 $ABCD$ 对角线的交点，在以 O，A，B，C，D 这 5 点中任意一点为起点，另一点为终点的所有向量中，写出：
   (1) 与$\overrightarrow{BC}$相等的向量；
   (2) 与$\overrightarrow{OB}$长度相等的向量；
   (3) 与$\overrightarrow{DA}$共线的向量.
2. 长度相等的向量是相等向量吗？相等向量是共线向量吗？平行于同一个向量的两个向量是共线向量吗？请举例说明.
3. 如图，O 为正方形 $ABCD$ 对角线的交点，四边形 $OAED$，$OCFB$ 都是正方形. 在图中所示的向量中：
   (1) 分别写出与$\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{BO}$相等的向量；
   (2) 写出与$\overrightarrow{AO}$共线的向量；
   (3) 写出与$\overrightarrow{AO}$的模相等的向量；



(第 3 题)

(4) 向量$\overrightarrow{AO}$与$\overrightarrow{CO}$是否相等？

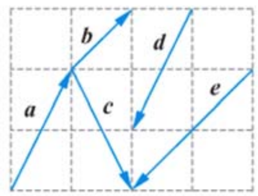
思考・运用

4. 在如图所示的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{e}$ 中(小正方形的边长为 1)，是否存在：

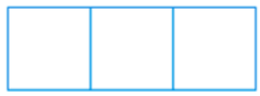
(1) 共线向量？ (2) 相反向量？

(3) 相等向量？ (4) 模相等的向量？

若存在，分别写出这些向量.



(第 4 题)



(第 5 题)

探究・拓展

5. 如图，以 1×3 方格纸中的格点为起点和终点的所有向量中，有多少种大小不同的模？有多少种不同的方向？

2.2 向量的线性运算

利用向量的表示，从景点 O 到景点 A 的位移为$\overrightarrow{OA}$，从景点 A 到景点 B 的位移为$\overrightarrow{AB}$，那么经过这两次位移后游艇的合位移是$\overrightarrow{OB}$(图 2-2-1).

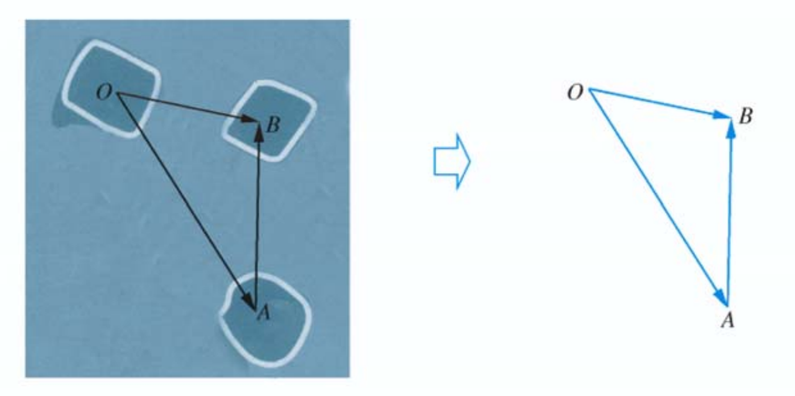


图 2-2-1

● 这里，向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OB}$三者之间有什么关系？

2.2.1 向量的加法

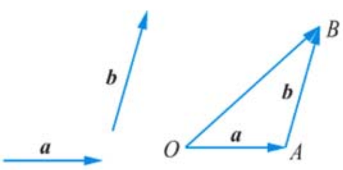


图 2-2-2

已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$(图 2-2-2)，在平面内任取一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则向量$\overrightarrow{OB}$叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}.$$

求两个向量和的运算叫做向量的加法.

根据向量加法的定义得出的求向量和的方法，称为向量加法的三角形法则.

对于零向量和任一向量 $\boldsymbol{a}$，有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}.$$

对于相反向量，有 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

向量的加法满足交换律、结合律，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

下面我们通过作图方式加以验证.

如图 2-2-3,作 ▱$OABC$,使$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}$.

因为 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$,

所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

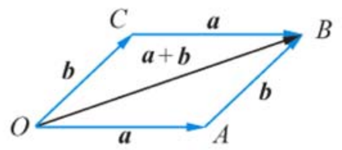


图 2-2-3

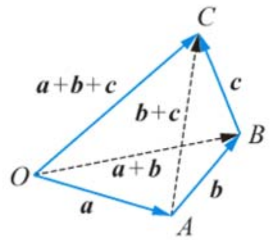


图 2-2-4

图 2-2-3 还表明,对于两个不共线的非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,我们还可以作平行四边形来求两个向量的和. 分别作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}$, 以 OA, OC 为邻边作 ▱$OABC$,则以 O 为起点的对角线$\overrightarrow{OB}$就是向量$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和. 我们把这种方法叫做**向量加法的平行四边形法则**.

同样,根据图 2-2-4 可以验证,向量的加法也满足结合律.

思　考

如果平面内有 n 个向量依次首尾连接组成一条封闭折线,那么这 n 个向量的和是什么?

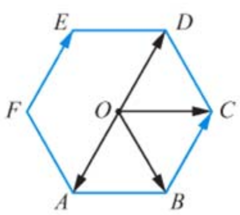


图 2-2-5

例 1　如图 2-2-5,O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心,作出下列向量:

(1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$;　　(2) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FE}$;　　(3) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{FE}$.

解　(1) 因为四边形 $OABC$ 是以 OA,OC 为邻边的平行四边形,OB 为其对角线,所以

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}.$$

(2) 因为$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{FE}$方向相同且长度相等,所以$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{FE}$是相等向量,故$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FE}$与$\overrightarrow{BC}$方向相同,长度为$\overrightarrow{BC}$长度的 2 倍,因此,$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FE}$可用$\overrightarrow{AD}$表示. 所以

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AD}.$$

(3) 因为$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{FE}$是一对相反向量,所以

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{FE}=\mathbf{0}.$$

例 2　在长江南岸某渡口处,江水以 12.5 km/h 的速度向东流,渡船

的速度为 25 km/h. 渡船要垂直地渡过长江，其航向应如何确定？

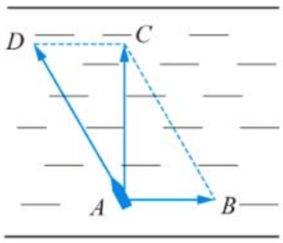


图 2-2-6

分析　如图 2-2-6，渡船的实际速度$\overrightarrow{AC}$、船速$\overrightarrow{AD}$与水速$\overrightarrow{AB}$应满足$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

解　如图 2-2-6，设$\overrightarrow{AB}$表示水流的速度，$\overrightarrow{AD}$表示渡船的速度，$\overrightarrow{AC}$表示渡船实际垂直过江的速度.

因为$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$，所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

在 Rt$\triangle ACD$ 中，

$$\angle ACD=90^\circ,$$

$$|\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{AB}|=12.5,$$

$$|\overrightarrow{AD}|=25,$$

所以　$\angle CAD=30^\circ$.

答　渡船要垂直地渡过长江，其航向应为北偏西 30°.

练　习

1. 如图，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，作出 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

（第 1 题）

2. 已知 O 是▱$ABCD$ 对角线的交点，则下面结论中正确的是（　　）.

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}$　　B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}\neq\overrightarrow{BD}$　　D. $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\neq\mathbf{0}$

3. 在$\triangle ABC$ 中，求证：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\neq\mathbf{0}$.

4. 一质点从点 A 出发，先向北偏东 30°方向运动了 4 cm，到达点 B，再从点 B 向正西方向运动了 3 cm 到达点 C，又从点 C 向西南方向运动了 4 cm 到达点 D，试画出向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$ 以及$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$.

2.2.2　向量的减法

向量的减法是向量加法的逆运算.

若 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$，则向量 $\boldsymbol{x}$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，求两个向量差的运算，叫做向量的减法.

根据向量减法的定义和向量加法的三角形法则，我们可以得到向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的作图方法.

例 1 如图 2-2-7(1),已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 不共线,求作向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

如果 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,怎样作出 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 呢?

图 2-2-7

作法 如图 2-2-7(2),在平面内任取一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$.

因为 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$,即 $\boldsymbol{b}+\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}$.

所以 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

这就是说,当向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 起点相同时,从 $\boldsymbol{b}$ 的终点指向 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

由向量加法结合律可知,

$$[\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})]+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+[(-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}]=\boldsymbol{a},$$

所以

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

这表明:减去一个向量等于加上这个向量的相反向量.

思 考

你能画图说明 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 吗?

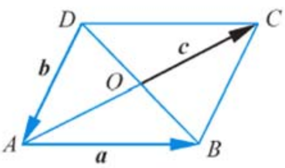


图 2-2-8

例 2 如图 2-2-8,O 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线的交点,若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,试证明:$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$.

分析 要证 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$,只要证 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OA}+\boldsymbol{a}$.

证明 因为 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}$,

$\overrightarrow{OA}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$,

所以 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OA}+\boldsymbol{a}$,

即 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$.

注:本题还可以通过

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$$

来证明,或者从

$$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}$$

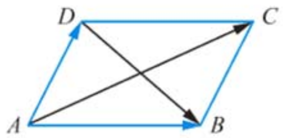
来证明.

你还可以用其他方法来证明吗?

思　考

任意一个非零向量是否一定可以表示为两个不共线的向量的和?

练　习



(第 1 题)

1. 如图,在▱$ABCD$中, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,用 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{DB}$.

2. 若 $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OM}$, 试判断下列结论是否正确:

(1) $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}$;　　(2) $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OE}$;

(3) $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{OM}$;　　(4) $\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{MO}$.

3. 若非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 互为相反向量,则下列说法中错误的是(　　).

A. $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$　　B. $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$　　C. $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$　　D. $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$

4. $\triangle ABC$ 中,D 是 BC 的中点. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{d}$, 则 $\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}=$ ________, $\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}=$ ________.

5. 已知$\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=BC$,则下列哪几个等式是成立的?

(1) $|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|$;

(2) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|$;

(3) $|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}|$;

(4) $|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|^2=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CA}|^2$.

6. 已知四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O,且 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$. 求证: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

2.2.3　向量的数乘

质点从点 O 出发做匀速直线运动,若经过 1 s 的位移对应的向量用 $\boldsymbol{a}$ 表示,那么在同方向上经过 3 s 的位移所对应的向量可用 $3\boldsymbol{a}$ 来表示.

● 这里,$3\boldsymbol{a}$ 是何种运算的结果?

一般地,实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积是一个向量,记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,它的长度和方向规定如下:

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$;

(2) 当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 相乘,叫做向量的数乘(scalar multiplication of vectors).

向量的数乘与向量的加法、减法统称为向量的线性运算.

根据向量数乘的定义,可以验证向量数乘满足下面的运算律.

(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

例 1 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$，求作向量 $-2.5\boldsymbol{a}$ 和向量 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.

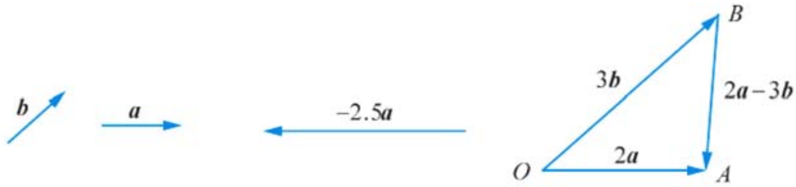


图 2-2-9

作法 如图 2-2-9 所示，向量 $-2.5\boldsymbol{a}$ 的长度是 $\boldsymbol{a}$ 的长度的 2.5 倍，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

以 O 为起点，分别作 $\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=3\boldsymbol{b}$，连结 BA，则

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}.$$

例 2 计算：

(1) $3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-2(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$；

(2) $2(2\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})-3(-3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})$.

解 (1) 原式 $=3\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-7\boldsymbol{b}$；

(2) 原式 $=4\boldsymbol{a}+12\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{c}+9\boldsymbol{a}-12\boldsymbol{b}+6\boldsymbol{c}=13\boldsymbol{a}$.

思 考

向量数乘与实数乘法有哪些相同点和不同点？

练 习

1. 计算：

(1) $3(-4\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})$；　　(2) $6(2\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})-(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$.

2. 如图，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，求作向量：

(1) $-2\boldsymbol{a}$；　　(2) $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；

(3) $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

（第 2 题）

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-5\boldsymbol{e}_2$，求 $4\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$(用 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 表示).

4. 已知$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$是不共线向量，$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}(t\in\mathbf{R})$，试用$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$表示$\overrightarrow{OP}$.

例 3 如图 2-2-10，D，E 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AB，AC 的中点，求证：$\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{DE}$ 共线，并将 $\overrightarrow{DE}$ 用 $\overrightarrow{BC}$ 线性表示.

如果 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$，则称向量 $\boldsymbol{b}$ 可以用非零向量 $\boldsymbol{a}$ 线性表示.

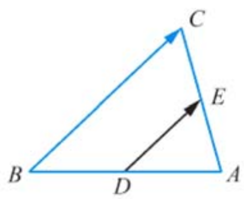


图 2-2-10

证明 因为 D，E 分别为 AB，AC 的中点，

所以 $DE\parallel BC$，

即$\overrightarrow{BC}$ 与$\overrightarrow{DE}$ 共线.

又 $DE=\dfrac{1}{2}BC$，且$\overrightarrow{DE}$ 与$\overrightarrow{BC}$ 同向，

所以 $\quad \overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$

从上面的例 3 中我们看到，如果两个向量共线，那么其中的一个向量可以由另一个(非零)向量的数乘来表示，即线性表示.

一般地，对于两个向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$，$\boldsymbol{b}$，有如下的向量共线定理：

> 如果有一个实数 λ，使
> $$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}),$$
> 那么 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 是共线向量；反之，如果 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$ 是共线向量，那么有且只有一个实数 λ，使
> $$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}.$$

证明　根据向量数乘的定义可知，对于向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$ 和 $\boldsymbol{b}$，如果有一个实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，那么 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 是共线向量.

反过来，如果向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$ 是共线向量，

当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向时，令 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$；

当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向时，令 $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$；

若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则令 $\lambda=0$.

从而有一个实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

假设有两个实数 λ，λ'，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}=\lambda'\boldsymbol{a}$，则

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=(\lambda-\lambda')\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},$$

$$|\lambda-\lambda'||\boldsymbol{a}|=0.$$

因为 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，

所以 $\lambda-\lambda'=0$，

即 $\lambda=\lambda'$.

从而有且仅有一个实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

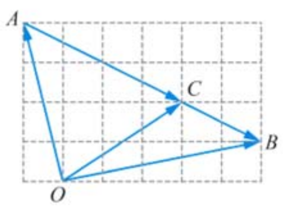


图 2-2-11

例 4　如图 2-2-11，$\triangle OAB$ 中，C 为直线 AB 上一点，$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$ $(\lambda\neq-1)$. 求证：$\overrightarrow{OC}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$.

分析　将已知条件中的 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CB}$ 用结论式中的$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 表示，进而解出$\overrightarrow{OC}$.

证明　因为 $\quad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA},$

$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC},$

又 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$,

所以 $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$,

即 $(1+\lambda)\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$.

又因为 $\lambda\neq-1$,

即 $1+\lambda\neq0$,

所以 $\overrightarrow{OC}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$.

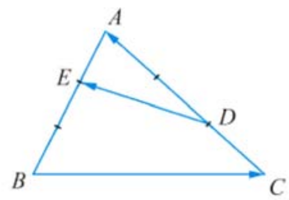
当$\lambda=1$时,你能得到什么结论?

思　考

上例所证明的结论 $\overrightarrow{OC}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$ 表明:起点为 O,终点为直线 AB 上一点 C 的向量$\overrightarrow{OC}$可以用$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$表示.那么两个不共线的向量$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$可以表示平面内任一向量吗?

练　习

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=-3(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1)$,求证:$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是共线向量.
2. 已知 $\overrightarrow{MP}=4\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{PQ}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$,求证:$M$,$P$,$Q$ 三点共线.
3. 如图,在$\triangle ABC$中,$\dfrac{CD}{DA}=\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{1}{2}$,记$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$,求证:$\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

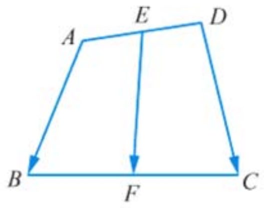


(第 3 题)

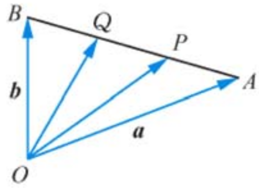
习题 2.2

感受·理解

1. 设 A,B,C 是平面内任意三点,求证:$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{0}$.
2. 当 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 满足什么条件时,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$成立?
3. 飞机从甲地按南偏东 10°的方向飞行 2 000 km 到达乙地,再从乙地按北偏西 70°的方向飞行 2 000 km 到达丙地,那么丙地在甲地的什么方向?丙地离甲地多远?
4. 化简下列各式:
   (1) $-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{CO}$;
   (2) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD})$.
5. 计算:
   (1) $3(5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})-2(6\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$;
   (2) $4(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c})-2(-3\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}+8\boldsymbol{c})$.
6. 已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,且 $3(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{a})-4(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$,求 $\boldsymbol{x}$.
7. 已知 $\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ 是两个不共线的向量,$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$.若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是共线向量,求实数 k 的值.
8. 如图,在任意四边形 $ABCD$ 中,E,F 分别是 AD,BC 的中点.
   求证:$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{EF}$.



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图，设点 P，Q 是线段 AB 的三等分点，若 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$.

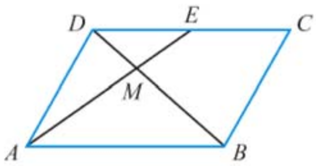
思考・运用

10. 证明：如果存在不全为 0 的实数 s，t，使得 $s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，那么 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是共线向量；如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，且 $s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，那么 $s=t=0$.

11. 求证：当两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线时，

(1) $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；

(2) $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.



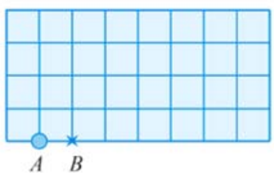
（第 12 题）

12. 如图，平行四边形 $ABCD$ 中，E 是 DC 中点，AE 交 BD 于 M，试用向量的方法证明：M 是 BD 的一个三等分点.

13. 设 D，E，F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC，CA，AB 上的点，且 $AF=\frac{1}{2}AB$，$BD=\frac{1}{3}BC$，$CE=\frac{1}{4}CA$. 若记 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{n}$，试用 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 表示 $\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{FD}$.

探究・拓展

14. 在第 9 题中，当点 P，Q 三等分线段 AB 时，有 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. 如果点 A_1，A_2，…，A_{n-1} 是 AB 的 $n(n\geqslant 3)$ 等分点，你能得到什么结论？请证明你的结论.



（第 15 题）

15. 如图，中国象棋的半个棋盘上有一只“马”，开始下棋时，它位于 A 点，这只“马”第一步有几种可能的走法？试在图中画出来. 它能否从点 A 走到与它相邻的点 B？它能否从任一交叉点出发，走到棋盘上的其他任何一个交叉点？

2.3 向量的坐标表示

2.3.1 平面向量基本定理

火箭在升空的某一时刻，速度可以分解成竖直向上和水平向前的两个分速度(图 2-3-1). 在力的分解的平行四边形法则中，我们看到一个力可以分解为两个不共线方向的力的和.

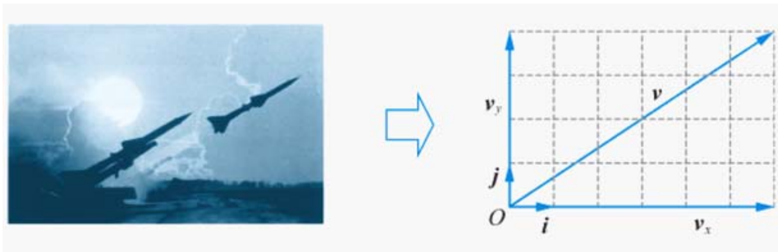


图 2-3-1

● 平面内任一向量是否可以用两个不共线的向量来表示呢?

如图 2-3-2，设 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 是平面内两个不共线的向量，$\boldsymbol{a}$ 是平面内的任一向量.

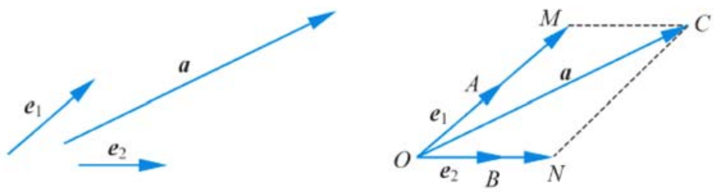


图 2-3-2

在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}$. 过点 C 作平行于 OB 的直线，交直线 OA 于 M；过点 C 作平行于 OA 的直线，交直线 OB 于 N，则有且只有一对实数 λ_1, λ_2，使得 $\overrightarrow{OM}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{ON}=\lambda_2\boldsymbol{e}_2$. 因为 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$，所以 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$.

于是，我们有下面的定理：

平面向量基本定理　如果 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内两个不共线的向量，那么对于这一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$，有且只有一对实数 λ_1, λ_2，使

$$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2.$$

我们把不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底(base).

一个平面向量用一组基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 表示成 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 的形式，我们称它为向量的分解. 当 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 互相垂直时，就称为向量的正交分解.

思　考

平面向量基本定理与前面所学的向量共线定理，在内容和表述形式上有什么区别和联系？

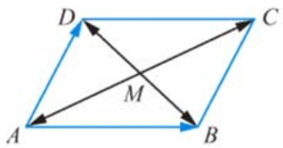


图 2-3-3

例1　如图 2-3-3，▱$ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 交于点 M，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用基底 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$ 和$\overrightarrow{MD}$.

分析　利用关系式$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ 和$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ 来求解.

解　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

因为平行四边形的对角线互相平分，

所以　$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

所以　$\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MC}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

$$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}.$$

例2　设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是平面内的一组基底，如果$\overrightarrow{AB}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{BC}=4\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CD}=8\boldsymbol{e}_1-9\boldsymbol{e}_2$，求证：$A$，$B$，$D$ 三点共线.

分析　欲证 A，B，D 三点共线，只需证明共起点的两个向量$\overrightarrow{AB}$ 与$\overrightarrow{AD}$ 共线，即证明$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

证明　$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

$=(3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)+(4\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)+(8\boldsymbol{e}_1-9\boldsymbol{e}_2)$

$=15\boldsymbol{e}_1-10\boldsymbol{e}_2=5(3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)=5\overrightarrow{AB}$，

所以$\overrightarrow{AD}$ 与$\overrightarrow{AB}$ 共线.

又$\overrightarrow{AD}$ 与$\overrightarrow{AB}$ 有公共的起点 A，所以 A，B，D 三点共线.

能否选择其他公共起点来证明？

练　习

1. 如图，已知向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，求作下列向量：

(1) $-2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$；　　(2) $2.5\boldsymbol{e}_1+1.5\boldsymbol{e}_2$.

(第1题)

2. 若 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是表示平面内所有向量的一组基底，则下面的四组向量中不能作为一组基底的是(　　).

A. $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$　　B. $3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$ 和 $4\boldsymbol{e}_2-6\boldsymbol{e}_1$

C. $\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_1$　　D. $\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$

3. 已知△ABC中，D是BC的中点，用向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$表示向量$\overrightarrow{AD}$.

4. 设P，Q分别是四边形的对角线AC与BD的中点，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{b}$，并且$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$不是共线向量，试用基底$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$表示向量$\overrightarrow{PQ}$.

2.3.2　平面向量的坐标运算

1. 平面向量的坐标表示

我们知道，在直角坐标平面内，点M可以用坐标(x, y)表示. 这种表示在确定点M的同时也确定了$\overrightarrow{OM}$的长度及$\overrightarrow{OM}$的方向. 换句话说，向量$\overrightarrow{OM}$也可以用坐标来表示.

起点在原点的向量叫做位置向量.

图 2-3-4 中，以原点O为起点的向量$\overrightarrow{OM}$对应点$M(4, 3)$；反过来，点$M(4, 3)$对应以原点O为起点的向量$\overrightarrow{OM}$. 因此，向量$\overrightarrow{OM}$可以用点M的坐标$(4, 3)$来表示.

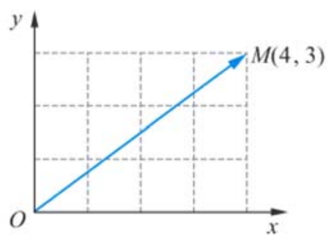


图 2-3-4

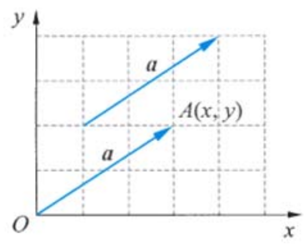


图 2-3-5

一般地，对于向量$\boldsymbol{a}$，如图 2-3-5，当它的起点移至原点O时，其终点的坐标(x, y)称为向量$\boldsymbol{a}$的(直角)坐标，记作

$$\boldsymbol{a}=(x, y).$$

若分别取与x轴、y轴方向相同的两个单位向量$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$作为基底，则

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}.$$

这里向量$\boldsymbol{a}$的分解就是正交分解.

例 1　如图 2-3-6，已知O是坐标原点，点A在第一象限，$|\overrightarrow{OA}|=4\sqrt{3}$，$\angle xOA=60^\circ$. 求向量$\overrightarrow{OA}$的坐标.

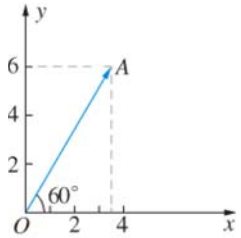


图 2-3-6

解　设点$A(x, y)$，则

$$x=4\sqrt{3}\cos 60^\circ=2\sqrt{3},\ y=4\sqrt{3}\sin 60^\circ=6,$$

即　$A(2\sqrt{3}, 6)$，

所以　$\overrightarrow{OA}=(2\sqrt{3}, 6)$.

2. 平面向量的坐标运算

当向量用坐标表示时，向量的和、差以及向量数乘也都可以用相应的坐标来表示.

设 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$,那么

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(x_1, y_1)+(x_2, y_2)\\&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})+(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})\\&=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}\\&=(x_1+x_2, y_1+y_2).\end{aligned}$$

同理得

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2, y_1-y_2), \lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1, \lambda y_1).$$

于是,我们有

> 已知向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$ 和实数 λ,那么
>
> $$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2, y_1+y_2),$$
> $$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2, y_1-y_2),$$
> $$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1, \lambda y_1).$$

如图 2-3-7,已知 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=(x_2, y_2)-(x_1, y_1)\\&=(x_2-x_1, y_2-y_1).\end{aligned}$$

这就是说,一个向量的坐标等于该向量终点的坐标减去起点的坐标.

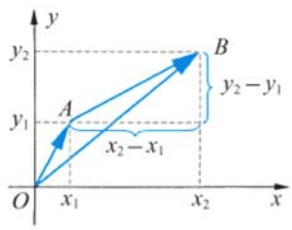


图 2-3-7

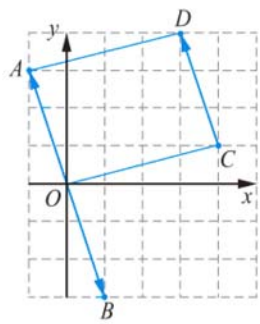


图 2-3-8

四边形 $OCDA$ 是平行四边形吗?

例 2 如图 2-3-8,已知 $A(-1, 3)$, $B(1, -3)$, $C(4, 1)$, $D(3, 4)$,求向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{CD}$ 的坐标.

解 $\overrightarrow{OA}=(-1, 3)$, $\overrightarrow{OB}=(1, -3)$,

$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OB}=(1, -3)$,

$\overrightarrow{CD}=(3, 4)-(4, 1)=(-1, 3)$.

例 3 已知 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，P 是直线 P_1P_2 上一点，且 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}(\lambda\neq-1)$，求点 P 的坐标．

解 设 $P(x, y)$，则 $\overrightarrow{P_1P}=(x-x_1, y-y_1)$，

$\overrightarrow{PP_2}=(x_2-x, y_2-y)$.

由 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，得

$$(x-x_1, y-y_1)=\lambda(x_2-x, y_2-y),$$

得到 $\begin{cases}x-x_1=\lambda(x_2-x),\\ y-y_1=\lambda(y_2-y).\end{cases}$

因为 $\lambda\neq-1$，

所以 $\begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.\end{cases}$

因此，P 点坐标为 $\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$.

这个公式叫做线段的定比分点公式．试与 2.2.3 小节的例 4 进行比较．

当 $\lambda=1$ 时，就得到线段 P_1P_2 的中点 $M(x, y)$ 的坐标公式

$$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2}{2},\\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}.\end{cases}$$

练 习

1. 与向量 $\boldsymbol{a}=(12, 5)$ 平行的单位向量为(　　).

   A. $\left(\dfrac{12}{13}, \dfrac{5}{13}\right)$　　B. $\left(-\dfrac{12}{13}, -\dfrac{5}{13}\right)$

   C. $\left(\dfrac{12}{13}, \dfrac{5}{13}\right)$或$\left(-\dfrac{12}{13}, -\dfrac{5}{13}\right)$　　D. $\left(\pm\dfrac{12}{13}, \pm\dfrac{5}{13}\right)$

2. 已知 O 是坐标原点，点 A 在第二象限，$|\overrightarrow{OA}|=2$，$\angle xOA=150°$，求向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标.
3. 已知四边形 $ABCD$ 的顶点分别为 $A(2, 1)$，$B(-1, 3)$，$C(3, 4)$，$D(6, 2)$，求向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DC}$的坐标，并证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形.
4. 已知作用在原点的三个力 $\boldsymbol{F}_1=(1, 2)$，$\boldsymbol{F}_2=(-2, 3)$，$\boldsymbol{F}_3=(-1, -4)$，求它们的合力的坐标．
5. 已知 $A(1, 2)$，$B(3, 2)$，向量 $\boldsymbol{a}=(x+3, x-3y-4)$ 与$\overrightarrow{AB}$ 相等，求实数 x 的值.
6. 已知 O 是坐标原点，$A(2, -1)$，$B(-4, 8)$，且$\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{0}$，求$\overrightarrow{OC}$的坐标．

3. 向量平行的坐标表示

● 向量 $\boldsymbol{a}=(1, -4)$ 与 $\boldsymbol{b}=(-2, 8)$ 是否平行？

由于

$$b=(-2,8)=-2(1,-4)=-2a,$$

因此 $a \parallel b$.

我们看到，此时向量 a 与 b 的坐标满足

$$1\times 8=(-4)\times(-2).$$

一般地，

当 $a=0$ 时，由于 0 与任意向量平行，故 $x_1y_2-x_2y_1=0$ 恒成立.

设向量 $a=(x_1,y_1)$，$b=(x_2,y_2)(a\neq 0)$，如果 $a\parallel b$，那么

$$x_1y_2-x_2y_1=0;$$

反过来，如果

$$x_1y_2-x_2y_1=0,$$

那么 $a\parallel b$.

证明　$a=(x_1,y_1)$，$b=(x_2,y_2)$，

因为 $a\neq 0$，

所以 x_1，y_1 不全为 0.

不妨假设 $x_1\neq 0$.

(1) 如果 $a\parallel b$，

则存在实数 λ，使

$$b=\lambda a,$$

即　$(x_2,y_2)=\lambda(x_1,y_1)=(\lambda x_1,\lambda y_1)$，

所以 $\begin{cases} x_2=\lambda x_1, & ① \\ y_2=\lambda y_1. & ② \end{cases}$

因为 $x_1\neq 0$，

由 ① 得

$$\lambda=\frac{x_2}{x_1}. \quad ③$$

将 ③ 代入 ②，得

$$y_2=\frac{x_2}{x_1}y_1,$$

即　$x_1y_2-x_2y_1=0$.

(2) 反之，如果 $x_1y_2-x_2y_1=0$，

因为 $x_1\neq 0$，

所以 $y_2=\dfrac{x_2}{x_1}y_1$.

$$(x_2,y_2)=\left(x_2,\frac{x_2}{x_1}y_1\right)=\frac{x_2}{x_1}(x_1,y_1).$$

令 $\lambda=\dfrac{x_2}{x_1}$，

则 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

例 4 已知 $\boldsymbol{a}=(1,\ 0)$，$\boldsymbol{b}=(2,\ 1)$，当实数 k 为何值时，向量 $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 平行？并确定此时它们是同向还是反向.

解 $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=k(1,\ 0)-(2,\ 1)=(k-2,\ -1)$，

$\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(1,\ 0)+3(2,\ 1)=(7,\ 3)$.

由向量平行的条件可得

$$3\cdot(k-2)-(-1)\cdot 7=0,$$

所以 $k=-\dfrac{1}{3}$. 此时，

$$k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\left(-\frac{7}{3},\ -1\right)=-\frac{1}{3}(7,\ 3)=-\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}).$$

因此，它们是反向的.

例 5 已知点 O,A,B,C 的坐标分别为 $(0,\ 0)$，$(3,\ 4)$，$(-1,\ 2)$，$(1,\ 1)$，是否存在常数 t，使得 $\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ 成立？解释你所得结论的几何意义.

解 设存在常数 t，使得 $\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，则

$$(3,4)+t(-1,\ 2)=(1,\ 1),$$

所以 $t(-1,\ 2)=(1,\ 1)-(3,\ 4)=(-2,\ -3)$，

所以 $\begin{cases}-t=-2,\\ 2t=-3.\end{cases}$

此方程组无解，故不存在这样的常数 t.

上述结论表明向量 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 不平行.

练 习

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(4,\ 3)$，$\boldsymbol{b}=(6,\ y)$，且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，求实数 y 的值.
2. 已知▱$ABCD$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(2,\ 1)$，$B(-1,\ 3)$，$C(3,\ 4)$，求第四个顶点 D 的坐标.
3. 已知 $A(0,\ -2)$，$B(2,\ 2)$，$C(3,\ 4)$，求证：A,B,C 三点共线.

习题 2.3

感受 · 理解

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-3,\ 4)$，$\boldsymbol{b}=(5,\ 2)$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$.
2. 设 $\overrightarrow{AB}=(2,\ 3)$，$\overrightarrow{BC}=(m,\ n)$，$\overrightarrow{CD}=(-1,\ 4)$，则 $\overrightarrow{DA}=$（　　）.

   A. $(1+m,\ 7+n)$　　B. $(-1-m,\ -7-n)$

   C. $(1-m,\ 7-n)$　　D. $(-1+m,\ -7+n)$

3. 当 x 为何值时,向量 $\boldsymbol{a}=(2,3)$ 与 $\boldsymbol{b}=(x,-6)$ 平行?

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 及其起点 A 的坐标,求终点 B 的坐标:

(1) $\boldsymbol{a}=(4,5)$, $A(2,3)$;

(2) $\boldsymbol{a}=(-3,-5)$, $A(3,7)$.

5. 设梯形 $ABCD$ 的顶点坐标为 $A(-1,2)$, $B(3,4)$, $D(2,1)$,且 $AB\,/\!/\,DC$, $AB=2CD$,求点 C 的坐标.

6. 已知 $A(1,-3)$ 和 $B(8,-1)$,如果点 $C(2a-1,a+2)$ 在直线 AB 上,求 a 的值.

7. 已知点 $O(0,0)$, $A(1,3)$, $B(-2,4)$,且 $\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'}=3\overrightarrow{OB}$,求 A', B' 两点及向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 的坐标.

8. 已知 A, B, C, D 四点的坐标分别为 $A(1,0)$, $B(4,3)$, $C(2,4)$, $D(0,2)$,试证明四边形 $ABCD$ 是梯形.

思考·运用

9. 已知点 $A(2,3)$, $B(5,4)$, $C(7,10)$,若点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}(\lambda\in\mathbf{R})$,当 λ 为何值时:(1) 点 P 在第一、三象限角平分线上?(2) 点 P 在第四象限内?

10. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是不共线的非零向量,求证:向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 不平行.

探究·拓展

11. 已知 O 是坐标原点, $A(3,1)$, $B(-1,3)$.若点 C 满足 $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$,其中 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$,且 $\alpha+\beta=1$,求点 C 的轨迹方程.

12. 已知 $\triangle ABC$ 三个顶点为 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$,求证:

(1) $\triangle ABC$ 的三条中线交于点 $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$;

(2) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$.

2.4 向量的数量积

前面我们学习了向量的加法、减法和数乘三种运算，那么向量与向量能否“相乘”呢？

我们先看一个实际问题：一个物体在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下发生了位移 $\boldsymbol{s}$，那么该力对此物体所做的功为多少？

我们知道，如果力 $\boldsymbol{F}$ 与物体位移 $\boldsymbol{s}$ 方向的夹角为 θ（图 2－4－1），那么 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 W 应为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta.$$

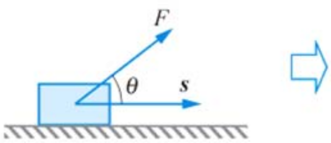


图 2－4－1

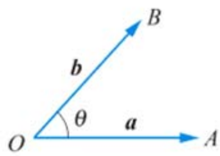


图 2－4－2

若把功 W 看成是两个向量 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的某种运算结果，那么这个结果是一个数量，它不仅与两个向量的长度有关，而且还与这两个向量的夹角有关．显然，这是一种新的运算．

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，它们的夹角是 θ，我们把数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积（或内积）(scalar product of vectors)，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

我们规定：零向量与任一向量的数量积为 0.

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}=0$ 不是零向量，而 $0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 是零向量．

对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ，我们作如下规定：

对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\angle AOB=\theta(0^\circ\leqslant\theta\leqslant180^\circ)$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角（图 2－4－2）．

当 $\theta=0^\circ$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向；

当 $\theta=180^\circ$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向；

当 $\theta=90^\circ$ 时，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

可见，前面提到的力所做的功 W，就是力 $\boldsymbol{F}$ 与在其作用下物体产生的位移 $\boldsymbol{s}$ 的数量积 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$.

由向量的数量积的定义可知：

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|;$$

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|.$$

特别地，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 可以简写为 $\boldsymbol{a}^2$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$.

例 1 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，分别在下列条件下求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$：

(1) $\theta=135^\circ$；　(2) $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$；　(3) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

解 (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=2\times3\times\cos135^\circ=-3\sqrt{2}$.

(2) 当 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 时，则 $\theta=0^\circ$ 或 180°.

若 $\theta=0^\circ$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=6$；

若 $\theta=180^\circ$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=-6$.

(3) 当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 和实数 λ，则向量的数量积满足下列运算律：

向量的数量积满足结合律吗？

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

根据定义不难验证运算律(1)，(2)的正确性，运算律(3)的证明参见“链接”.

链 接

$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影

由向量的数量积的定义可知，力 $\boldsymbol{F}$ 在位移 $\boldsymbol{s}$ ($\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{s}$ 分别用图 2-4-3 中的 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 表示)方向上所做的功，就是力 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{s}$ 方向上的分量 $\overrightarrow{OB_1}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的数量积($\overrightarrow{OB_1}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 同向、反向或为 $\boldsymbol{0}$).

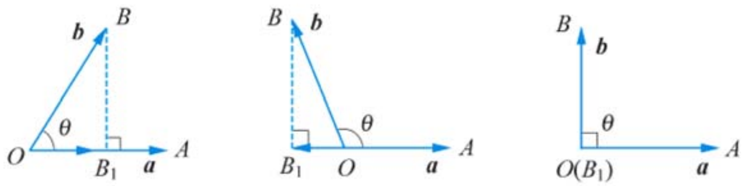


图 2-4-3

$|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫做向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影，它是数量. 当 θ 为锐角时，$\overrightarrow{OB_1}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，投影为正值；当 θ 为钝角时，$\overrightarrow{OB_1}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向，投影为

负值；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直时，投影为 0.

由此可知 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的几何意义是：数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{a}$ 的长度 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 的乘积.

利用上述 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的几何意义，下面我们证明向量数量积的运算律(3)：

如图 2-4-4，任取一点 O，作

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\ \overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c},$$

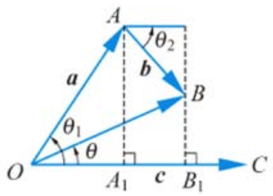


图 2-4-4

则 $$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$

而 $\overrightarrow{OB}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 方向上的投影等于 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 方向上的投影之和，即

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{a}|\cos\theta_1+|\boldsymbol{b}|\cos\theta_2.$$

所以 $\quad |\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}|\cos\theta_1+|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{b}|\cos\theta_2,$

所以 $\quad \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b},$

所以 $\quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.$

练　习

1. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是三个非零向量，试判断下列结论是否正确：

(1) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$；

(2) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；

(3) 若 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

2. 已知 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=6$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，求：(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；(2) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；(3) $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})$.

3. 求证：$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

● 若两个向量为 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，如何用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标来表示它们的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$？

设 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 分别是 x 轴和 y 轴上的单位向量，则

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1,\ \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0.$$

因为 $\quad \boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j},$

所以
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})\\&=x_1\boldsymbol{i}\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})+y_1\boldsymbol{j}\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})\\&=x_1x_2\boldsymbol{i}^2+x_1y_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+x_2y_1\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+y_1y_2\boldsymbol{j}^2\\&=x_1x_2+y_1y_2.\end{aligned}$$

由此可知，两个向量的数量积等于它们对应坐标的乘积的和，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2.$$

特别地，设 $\boldsymbol{a}=(x,\ y)$，则 $\boldsymbol{a}^2=x^2+y^2$，即 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

思　考

能否用向量方法推导出两点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$间的距离公式

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\ ?$$

设两个非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$，它们的夹角为 θ，由向量数量积的定义，可得

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ 是一个常用公式，用于求两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角.

特别地，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $x_1x_2+y_1y_2=0$；
反之，若 $x_1x_2+y_1y_2=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

例 2　已知 $\boldsymbol{a}=(2,\ -1)$，$\boldsymbol{b}=(3,\ -2)$，求$(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$.

解　因为　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times3+(-1)\times(-2)=8$，

$\boldsymbol{a}^2=2^2+(-1)^2=5$，

$\boldsymbol{b}^2=3^2+(-2)^2=13$，

所以　$(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$

$=3\boldsymbol{a}^2-7\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}^2$

$=3\times5-7\times8+2\times13=-15$.

例 3　已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,\ 1)$，$\boldsymbol{b}=(3,\ -1)$，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ.

解　因为　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times3+1\times(-1)=5$，

又　$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$，

所以　$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{5}{5\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

因为　$\theta\in[0,\ \pi]$，

所以　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

例 4　在$\triangle ABC$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=(2,\ 3)$，$\overrightarrow{AC}=(1,\ k)$，且 $\triangle ABC$ 是直角三角形，求 k 的值.

分析　题中未明确哪个角是直角，所以要分类讨论.

解　若 $\angle A=90^\circ$，则$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，于是

$$2\times1+3\times k=0,$$

解得　$k=-\dfrac{2}{3}$；

若 $\angle B=90°$，则$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$，又

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-1,k-3),$$

故得

$$2\times(-1)+3\times(k-3)=0,$$

解得 $k=\dfrac{11}{3}$；

若 $\angle C=90°$，则$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$，故

$$1\times(-1)+k(k-3)=0,$$

解得 $k=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

所求 k 的值为$-\dfrac{2}{3}$，或$\dfrac{11}{3}$，或$\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

练　习

1. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(3,-2)$，$\boldsymbol{c}=(-2,1)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

2. 已知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,-8)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-8,16)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

3. 设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=8$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=12$，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

4. 求下面各组中两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角：

(1) $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},1)$，$\boldsymbol{b}=(-2\sqrt{3},2)$；

(2) $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1-\sqrt{3},1+\sqrt{3})$.

5. 设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c}$，求证：$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$.

6. 已知 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直的条件.

7. 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是任意的非零向量，且相互不共线，有下列命题：

(1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；

(2) $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

(3) $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$ 不与 $\boldsymbol{c}$ 垂直；

(4) $(3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})=9|\boldsymbol{a}|^2-16|\boldsymbol{b}|^2$.

其中，是真命题的有(　　).

A. (1)(2)　　　　B. (2)(3)

C. (3)(4)　　　　D. (2)(4)

8. 设 $A(-2,1)$，$B(6,-3)$，$C(0,5)$，求证：$\triangle ABC$ 是直角三角形.

习题 2.4

感受·理解

1. 求证：

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$；

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$.

2. 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 和 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

3. 已知 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是夹角为 $60°$的两个单位向量，$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$.

(1) 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；

(2) 求证：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

4. 设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$|3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=3$，求 $|3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

5. 求证：$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)$. 如何构造一个图形解释这个公式的几何意义？

6. 已知直角坐标平面内，$\overrightarrow{OA}=(-1,8)$，$\overrightarrow{OB}=(-4,1)$，$\overrightarrow{OC}=(1,3)$. 求证：$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

7. 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，如果 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$，且 $(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

8. 已知 $A(1,0)$，$B(0,1)$，$C(2,5)$.

求：(1) $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ 的模；

(2) $\cos\angle BAC$.

9. 已知 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},\sqrt{5})$，$\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$，且 $|\boldsymbol{b}|=2$，求向量 $\boldsymbol{b}$ 的坐标.

10. 设 $\boldsymbol{a}=(x,3)$，$\boldsymbol{b}=(2,-1)$，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角，求 x 的取值范围.

思考 · 运用

11. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-3,2)$.

(1) 求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 和 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

(2) k 为何值时，向量 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 垂直？

(3) k 为何值时，向量 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 平行？

12. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(6,2)$，$\boldsymbol{b}=(-3,k)$，当 k 为何值时：

(1) $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$？

(2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$？

(3) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是钝角？

13. 已知 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},1)$，试求：

(1) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角.

探究 · 拓展

14. 设$\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$，判断$\triangle ABC$ 的形状.

15. 设向量 $\boldsymbol{a}=(\cos 75°,\sin 75°)$，$\boldsymbol{b}=(\cos 15°,\sin 15°)$，试分别计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 及 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$. 比较两次计算的结果，你能发现什么？

2.5 向量的应用

向量是既有大小又有方向的量，它既有代数特征，又有几何特征. 通过向量可以实现代数问题与几何问题的互相转化，所以向量是数形结合的桥梁. 同时，向量也是解决许多物理问题的有力工具.

例 1 如图 2-5-1(1)所示，无弹性的细绳 OA，OB 的一端分别固定在 A，B 处，同质量的细绳 OC 下端系着一个称盘，且使得 $OB\perp OC$，试分析 OA，OB，OC 三根绳子受力的大小，判断哪根绳受力最大.

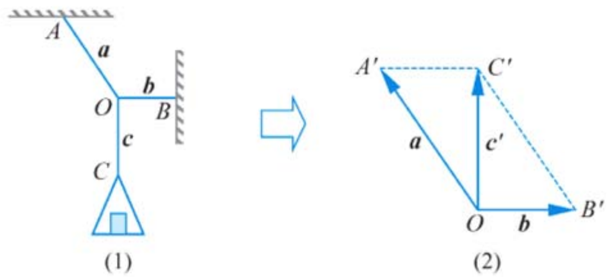


图 2-5-1

解 设 OA，OB，OC 三根绳子所受的力分别为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的合力为 $\boldsymbol{c}'=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{c}'|$.

如图 2-5-1(2)，在▱$OB'C'A'$中，

因为 $\overrightarrow{OB'}\perp\overrightarrow{OC'}$，$\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{OA'}$，

所以 $|\overrightarrow{OA'}|>|\overrightarrow{OB'}|$，$|\overrightarrow{OA'}|>|\overrightarrow{OC'}|$.

即 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{c}|$，所以细绳 OA 受力最大.

例 2 已知：$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{AC}$.

求证：$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$.

证明 因为 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{AC}$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=0, & ①\\ \overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=0. & ②\end{cases}$

②－① 得 $\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0$，

即 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，

所以 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$.

思　考

你能否画一个几何图形来解释例 2？

例 3 已知直线 l 经过点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$，用向量方法求 l 的方程.

分析 设 P 是直线 l 上任意一点，由 $\overrightarrow{P_1P}$ 与 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 共线的条件可推得直线 l 的方程.

解 设 $P(x, y)$ 是直线 l 上任意一点，则

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1), \overrightarrow{P_1P}=(x-x_1, y-y_1).$$

因为 P, P_1, P_2 三点都在直线 l 上，

所以 $\overrightarrow{P_1P}$ 与 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 是共线向量，

所以 $(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$. (＊)

这就是直线 l 的方程.

把（＊）中的 (x, y) 改为 (x_3, y_3)，我们就可以得到证明三点共线的一种方法.

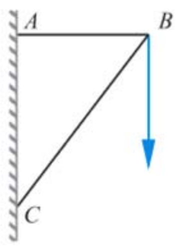
当直线 l 与坐标轴不平行时，$x_2\neq x_1$，$y_2\neq y_1$，于是方程(＊)可化为

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

这就是直线方程的两点式. 因此，无论直线是否与坐标轴平行，方程(＊)都表示经过 P_1 和 P_2 两点的直线方程.

练　习

1. 如图，一个三角形角铁支架 ABC 安装在墙壁上，$AB:AC:BC=3:4:5$，在 B 处挂一个 6 kg 的物体，求角铁 AB 与 BC 所受的力.
2. 用向量方法证明梯形中位线定理.
3. 直线 l 平行于向量 $\boldsymbol{a}=(2, 3)$，求直线 l 的斜率.
4. 直线 l 经过原点且与向量 $\boldsymbol{a}=(2, 3)$ 垂直，求直线 l 的方程.

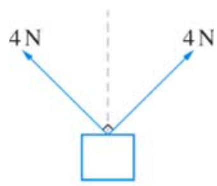


（第 1 题）

习题 2.5

感受·理解

1. 如图，夹角为 90° 的两根绳子提起一个重物，每根绳子用力 4 N，求物体的重量.
2. 某人在静水中游泳的速度为 $\sqrt{3}$ m/s，河水自西向东流速为 1 m/s，若此人朝正南方向游去，求他的实际前进方向和速度.



（第 1 题）

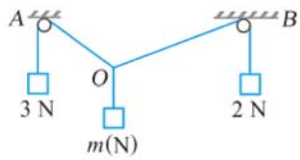
3. 已知两点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，试用向量的方法证明以线段 AB 为直径的圆的方程为

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$$

4. 在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\mathbf{0}$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，试证明四边形 $ABCD$ 是菱形.

思考·运用

5. 如图所示，一根绳穿过两个定滑轮，且两端分别挂有 3 N、2 N 的重物. 现在两个滑轮之间的绳上挂一个重量为 m(N)的重物，恰好使得系统处于平衡状态，求正数 m 的取值范围.



（第 5 题）

6. 已知在△ABC 中，BC，CA，AB 的长分别为 a，b，c，试用向量方法证明：
(1) $a=b\cos C+c\cos B$；
(2) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

探究·拓展

7. 已知向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 满足条件 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，且 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$，求证：△$ABC$ 是正三角形.

8. （阅读题）设 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 为直线上两点，则向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 及与它平行的向量都称为直线的方向向量. 当直线与 x 轴不垂直时，$\dfrac{1}{x_2-x_1}\overrightarrow{P_1P_2}$，即 $(1, k)$，也是直线的方向向量，其中 k 是直线的斜率. 如果直线经过点 $P_1(x_1, y_1)$，且它的方向向量是 $(1, k)$，试用向量共线的方法推导直线的点斜式方程.

阅 读

向量源自力学

1586 年，荷兰数学家、物理学家斯蒂文(Stevin，1548～1620)在其著作《静力学原理》中，首先在两力互成直角的情形下，引进了力的三角形法则(或平行四边形法则). 但是他未能令人信服地推广到力取任意方向的一般情况. 牛顿(Newton，1643～1727)在《自然哲学的数学原理》一书中作为三个运动定律的推论，才明确提出了力的合成与分解定理.

1788 年，法国数学家、物理学家拉格朗日(Lagrange，1736～1813)在《分析力学》中把带有方向的物理量数学化，即用数学方法来表示它们. 例如，他不仅用具有确定长度和方向的有向线段来表示一个力 f，而且把 f 置于空间直角坐标系中，并沿坐标轴把 f 分解为三个分力 f_x，f_y 和 f_z. 这些分力作为坐标轴上的有向线段，可以简单地用数来表示. 这样，在力学中关于力、速度和加速度的所有方程，可以转化为联系它们分量的关于 x，y，z 的三个方程 .

拉格朗日没有使用“向量(vector)”一词. 直到 1844 年，德国数学家格拉斯曼(Grassman，1809～1877)才引入有向线段的记号，称之为向量，并引入向量的一般运算. 他创立了具有 n 个分量的超复数和

n 维向量等概念，并且有效地定义了 n 维向量的各种运算.

数学探究

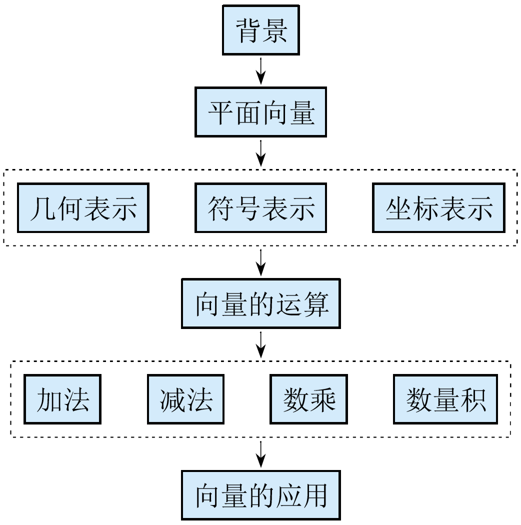
早在 19 世纪，数学家就已经将平面向量扩展到了空间，并给出了空间向量的表示方法、运算法则，也建立了相应的理论. 请同学们独立地完成下面的研究工作.

1. 给出空间向量的概念及加法运算和减法运算的法则.
2. 给出空间向量的坐标表示方法，及坐标表示的加法运算法则和减法运算法则.
3. 给出空间向量基本定理，并说明理由.
4. 给出空间向量数量积的定义、坐标计算方法.
5. 查阅有关资料完善你的研究成果，并完成下面的习题：

已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=a$，$AD=b$，$AA_1=c$，$\angle BAD=\alpha$，$\angle BAA_1=\beta$，$\angle DAA_1=\gamma$，试用 $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$ 表示对角线 AC_1 的长.

本章回顾

本章我们主要学习了向量的概念、表示及运算，平面向量的基本定理，向量共线、垂直的条件，向量在几何和物理问题中的简单应用.



学习本章应注意类比，如向量的运算法则及运算律可与实数相应的运算法则及运算律进行横向类比. 而一维情形下向量的共线条件，到二维的平面向量基本定理，进而今后推广到三维的空间向量基本定理，又可进行纵向类比.

向量是数形结合的载体，在本章学习中，一方面通过数形结合来研究向量的概念和运算；另一方面，我们又以向量为工具，数形结合地解决数学和物理的有关问题. 同时，向量的坐标表示为我们用代数方法研究几何问题提供了可能，丰富了我们研究问题的范围和手段.

复 习 题

感受・理解

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(3,1)$，试求下列向量的坐标：

(1) $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$；　　(2) $\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(5,10)$，$\boldsymbol{b}=(-3,-4)$，$\boldsymbol{c}=(5,0)$，试将向量 $\boldsymbol{c}$ 用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示.

3. 已知△OAB 的两个顶点为原点 O 和 $A(5,2)$，且 $\angle A=90°$，$AB=AO$. 求：(1) $\overrightarrow{AB}$ 的坐标；(2) B 点的坐标.

4. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,-7)$，$\boldsymbol{b}=(x,y)$，$\boldsymbol{c}=(3,5)$，若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，求 x，y 的值.

5. 已知 $|\boldsymbol{a}|=5$，$\boldsymbol{b}=(3,2)$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，求 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

6. 设 A，B，C，D 为平面内的四点，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，$A$ 点坐标为 $(3,1)$，B 点坐标为 $(-2,2)$.

(1) 若 C 点坐标为 $(-1,4)$，求 D 点坐标；

(2) 原点为 O，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AB}$，求 P 点坐标.

7. 已知 $A(6,1)$，$B(0,-7)$，$C(-2,-3)$，试确定△ABC 的形状.

8. 已知△ABC 和△$A'B'C'$ 满足条件 $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}$. 求证：

(1) $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$；

(2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B'C'}$.

9. 已知 $A(a,1)$，$B(3,5)$，$C(7,3)$，$D(b,-1)$ 是菱形的四个顶点，求实数 a，b 的值.

10. 已知 $\boldsymbol{a}=(-3,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2)$，若 $(-2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})$，求实数 k 的值.

思考・运用

11. 已知向量 $\boldsymbol{m}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{n}=4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{p}=3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，试将 $\boldsymbol{p}$ 用 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 表示.

12. 已知：D，E，F 分别是△ABC 中 BC，CA，AB 的中点，P 是平面内任意一点. 求证：$\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$.

13. 某人骑自行车以 a km/h 的速度向东行驶，感受到风从正北方向吹来；而当速度为原来的 2 倍时，感受到风从正东北方向吹来. 试求实际的风速.

14. 已知坐标平面内 $\overrightarrow{OA}=(1,5)$，$\overrightarrow{OB}=(7,1)$，$\overrightarrow{OM}=(1,2)$，$P$ 是直线 OM 上一个动点. 当 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 取最小值时，求 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标，并求 $\cos\angle APB$ 的值.

探究・拓展

15. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},-1)$，$\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(1) 求证：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；

(2) 是否存在不等于 0 的实数 k 和 t，使 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+(t^2-3)\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{y}=-k\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$？如果存在，试确定 k 与 t 的关系；如不存在，请说明理由.

16. (阅读题)在解析几何中我们学习了直线方程，知道 $Ax+By=0$ 表示平面内一条直线 l，若将直线方程写为向量的坐标运算形式，便有 $(A,B)\cdot(x,y)=0$，其中 (x,y) 表示直线 l 上任一点 M 的坐标，也即向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标. 令 $\boldsymbol{n}=(A,B)$，则 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{OM}$. 我们把与直线 l 垂直的向量称为直线 l 的法向量，故 $\boldsymbol{n}=(A,B)$ 是直线 $Ax+By=0$ 的一个法向量. 令 $\boldsymbol{v}=(-B,A)$，因为 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=(-B,A)\cdot(A,B)=0$，所以 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{n}$. 也就是说，$\boldsymbol{v}=(-B,A)$ 是直线 $Ax+By=0$ 的一个方向向量(参见习题 2.5 第 8 题). 据此试分别求出直线 $x+y=0$ 及 $y=kx(k\neq0)$ 的一个法向量和一个方向向量.

A mathematician, like a painter or poet, is a maker of pattern.

—G. H. Hardy

在第 1 章中,我们从点的数学表示开始初步研究了圆周上一点的运动,并用正弦函数 $y=\sin x$ 来刻画周期运动. 与周期运动相关的另一个基本问题是“周期运动的叠加”.

先看一个特例. 点 Q 在半径为 1 的圆 P 上运动的同时,圆心 P 又在另一个半径也为 1 的圆 O 上运动,O 为定点,P,Q 两点的初始位置如图 1 所示,其中 $OP\perp QP$,且 P,Q 两点以相同的角速度逆时针方向运动,这时,点 Q 的运动如何刻画？我们用向量的方法分析如下：

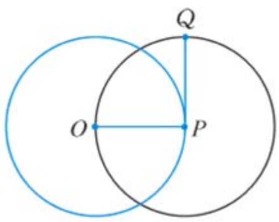


图 1

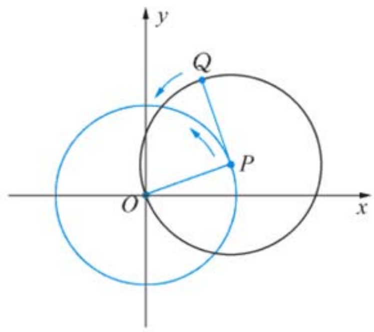


图 2

如图 2,设$\overrightarrow{OP}=(\cos x,\ \sin x)$,则

$$\overrightarrow{PQ}=\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

由$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}$,可知

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ}&=\left(\cos x+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\ \sin x+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)\\&=(\cos x-\sin x,\ \sin x+\cos x).\end{aligned}$$

● 对于函数 $y=\sin x+\cos x$,我们猜想它仍然表示一个简谐运动,即 $\sin x+\cos x$ 能够恒等变形为 $A\sin(\omega x+\varphi)$ 的形式. 果真如此吗？

3.1 两角和与差的三角函数

由向量的数量积运算法则，可知

$$\cos x+\sin x=(\cos x,\ \sin x)\cdot(1,1);$$

另一方面，

$(\cos x,\ \sin x)\cdot(1,\ 1)=\sqrt{\cos^2 x+\sin^2 x}\ \sqrt{1^2+1^2}\cos\theta=\sqrt{2}\cos\theta$，

其中 θ 为向量 $(\cos x,\ \sin x)$ 与向量 $(1,\ 1)$ 的夹角. 于是有

$$\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

这是一个有趣的等式，在回答了 $\sin x+\cos x$ 可以化为 $A\sin(\omega x+\varphi)$ 的同时，它还告诉我们 $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 可以用 x 的三角函数与 $\frac{\pi}{4}$ 的三角函数来表示. 这又启发我们联想到更一般的问题：

- $\cos(\alpha-\beta)$ 能否用 α 的三角函数与 β 的三角函数来表示？

3.1.1 两角和与差的余弦

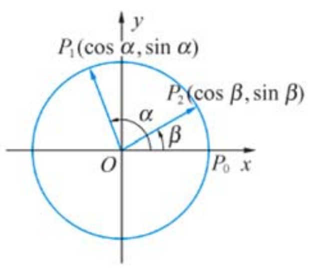


图 3-1-1

把 $\cos(\alpha-\beta)$ 看成两个向量夹角的余弦，考虑用向量的数量积来研究.

在直角坐标系 xOy 中，以 Ox 轴为始边分别作角 α，β，其终边分别与单位圆交于 $P_1(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$P_2(\cos\beta,\ \sin\beta)$，则 $\angle P_1OP_2=\alpha-\beta$. 由于余弦函数是周期为 2π 的偶函数，所以，我们只需考虑 $0\leqslant\alpha-\beta<\pi$ 的情况.

设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP_1}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，

$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OP_2}=(\cos\beta,\ \sin\beta)$，

则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta).$$

因为 $0\leqslant\alpha-\beta<\pi$，所以 $\alpha-\beta$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角.

另一方面，由向量数量积的坐标表示，有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

所以

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \qquad (C_{(\alpha-\beta)})$$

这就是两角差的余弦公式.

探　究

如图 3-1-2,在直角坐标系 xOy 中,单位圆 O 与 x 轴交于 P_0. 以 Ox 为始边分别作出角 α, β, $\alpha-\beta$, 其终边分别和单位圆交于 P_1, P_2, P_3. 由 $|\overrightarrow{P_0P_3}|=|\overrightarrow{P_2P_1}|$,你能否导出两角差的余弦公式?

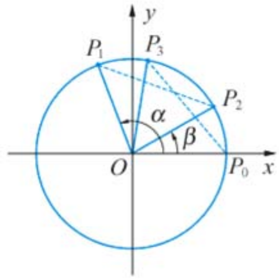


图 3-1-2

在两角差的余弦公式中,用 $-\beta$ 代替 β,就可以得到

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos[\alpha-(-\beta)]\\&=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta),\end{aligned}$$

即

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \qquad (C_{(\alpha+\beta)})$$

这就是两角和的余弦公式.

思　考

“用 $-\beta$ 代替 β”的换元方法体现在图形上具有什么几何意义?你能直接利用向量的数量积推出两角和的余弦公式吗?

在第 1 章中,我们曾经学习过许多诱导公式,这些诱导公式都可以看成和(差)角公式的特例,因此也可以由和(差)角公式推出.

例 1 利用两角和(差)的余弦公式证明下列诱导公式:

(1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$;　　(2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$.

证明 (1) 由公式 $C_{(\alpha-\beta)}$ 得

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=\sin\alpha,$$

所以有 $$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$$

(2) 在上式中,用 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 代换 α,可以得到

$$\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$$

即 $\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, 或 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$.

例 2 利用两角和(差)的余弦公式，求 $\cos 75°$，$\cos 15°$，$\sin 15°$，$\tan 15°$.

解 $\cos 75° = \cos(45°+30°) = \cos 45°\cos 30° - \sin 45°\sin 30°$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

$\cos 15° = \cos(45°-30°) = \cos 45°\cos 30° + \sin 45°\sin 30°$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\sin 15° = \cos(90°-15°) = \cos 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

$$\tan 15° = \frac{\sin 15°}{\cos 15°} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{3}.$$

可用图 3-1-3 验证计算结果.

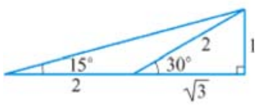


图 3-1-3

例 3 已知 $\sin\alpha = \frac{2}{3}$，$\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$，$\cos\beta = -\frac{3}{5}$，$\beta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$，求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

分析 由公式 $C_{(\alpha+\beta)}$ 可知，欲求 $\cos(\alpha+\beta)$，应先计算 $\cos\alpha$ 和 $\sin\beta$ 的值.

解 由 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$，得

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

又由 $\beta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$，得

$$\sin\beta = -\sqrt{1-\cos^2\beta} = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}.$$

由余弦的和角公式得

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ &= \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{2}{3}\left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{8+3\sqrt{5}}{15}.\end{aligned}$$

思　考

在上例中，你能求出 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值吗？

练　习

1. 利用两角和(差)的余弦公式证明：

(1) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\sin\alpha$；

(2) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$.

2. 利用两角和(差)的余弦公式化简：

(1) $\cos 58^\circ\cos 37^\circ+\sin 58^\circ\sin 37^\circ$；

(2) $\cos(60^\circ+\theta)-\cos(60^\circ-\theta)$；

(3) $\cos(60^\circ+\theta)+\cos(60^\circ-\theta)$.

3. 已知 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$，$\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，求 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$的值.

习题 3.1(1)

感受·理解

1. 化简：

(1) $\cos 24^\circ\cos 36^\circ-\cos 66^\circ\cos 54^\circ$；

(2) $\cos 58^\circ\sin 37^\circ+\sin 122^\circ\sin 53^\circ$；

(3) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$；

(4) $\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)$.

2. (1) 已知 $\sin\alpha=\frac{15}{17}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，求 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$的值；

(2) 已知 $\cos\theta=-\frac{5}{13}$，$\theta\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$，求 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$的值.

3. (1) 已知 α，β 都是锐角，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=\frac{5}{13}$，求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值；

(2) 已知 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$，$\cos\beta=-\frac{3}{4}$，且 α，β 都是第二象限角，求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

思考·运用

4. 已知 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{5}$，求 $\tan\alpha\tan\beta$ 的值.

5. 设 O 为坐标原点，$P_1(x_1, y_1)$和 $P_2(x_2, y_2)$为单位圆上两点，且 $\angle P_1OP_2=\theta$，求证：$x_1x_2+y_1y_2=\cos\theta$.

6. 求 $y=\cos x-\sin x$ 的最大值和最小值.

探究·拓展

7. 试用向量的方法直接推导两角和的余弦公式.

3.1.2 两角和与差的正弦

回顾 3.1.1 小节例 2 中求 $\sin 15^\circ$的过程，我们先将 $\sin 15^\circ$转化为 $\cos 75^\circ$，再利用两角和的余弦公式来计算. 而 $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$，那么有没有两角和(差)的正弦公式呢？

事实上，

通过诱导公式 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$，$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$，可以实现正弦、余弦函数间的转化.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,\end{aligned}$$

即

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \qquad (S_{(\alpha+\beta)})$$

这就是两角和的正弦公式.

在两角和的正弦公式中，用 $-\beta$ 代替 β，就可以得到

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta),$$

即

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \qquad (S_{(\alpha-\beta)})$$

这就是两角差的正弦公式.

思 考

能不能利用同角三角函数的关系，从 $C_{(\alpha\pm\beta)}$ 推导出 $S_{(\alpha\pm\beta)}$？这样做有什么困难？

例 1 已知 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\cos\beta=-\frac{3}{5}$，$\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，求 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值.

解 由 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，得 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

又由 $\cos\beta=-\frac{3}{5}$，$\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，得 $\sin\beta=-\frac{4}{5}$.

所以，

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\&=\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)\\&=\frac{-6+4\sqrt{5}}{15}.\end{aligned}$$

例 2 已知 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$，$\cos\beta=\frac{4}{5}$，$\alpha$，$\beta$ 均为锐角，

求 $\sin\alpha$ 的值.

分析　把角 α 看成是角 $\alpha+\beta$ 与 β 的差，即 $\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$，再用两角差的正弦公式求解.

解　由 α，β 均为锐角，可知

$0^\circ<\alpha+\beta<180^\circ$，$\sin\beta>0$，$\sin(\alpha+\beta)>0$.

由 $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{5}{13}$，得

$$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}.$$

由 $\cos\beta=\dfrac{4}{5}$，得

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}.$$

由公式 $S_{(\alpha-\beta)}$，可得

$$\sin\alpha=\sin[(\alpha+\beta)-\beta]=\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta$$

$$=\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}-\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}=\frac{33}{65}.$$

例 3　求函数 $y=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ 的最大值.

本题还有其他解法吗？

解　$y=\sin x\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos x\sin\dfrac{\pi}{3}=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

当 $x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，函数 y 取得最大值 1.

思　考

函数 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ 是否为周期函数？y 有最大值吗？

练　习

1. 下列等式中恒成立的是（　　）.

A. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

B. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta$

C. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta$

D. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

2. $\sin 13^\circ\cos 17^\circ+\cos 13^\circ\sin 17^\circ$ 化简得（　　）.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\sin 4^\circ$　　D. $\cos 4^\circ$

3. $\sin 200^\circ\cos 140^\circ-\cos 160^\circ\sin 40^\circ$ 化简得（　　）.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\sin 20^\circ$　　C. $\cos 20^\circ$　　D. $\dfrac{1}{2}$

4. 化简：

(1) $\sin 11^\circ \cos 29^\circ + \cos 11^\circ \sin 29^\circ$；

(2) $\cos 24^\circ \cos 69^\circ - \sin 24^\circ \sin 111^\circ$；

(3) $\sin^2 22.5^\circ - \cos^2 22.5^\circ$；

(4) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$.

5. 求值：(1) $\sin 105^\circ$；　　(2) $\cos 165^\circ$.

6. 已知 $\cos\theta = -\frac{3}{5}$，$\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$，求 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ 和 $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

7. 已知 $\sin\alpha = \frac{2}{3}$，$\cos\beta = -\frac{3}{4}$，且 α，β 都是第二象限角，求 $\sin(\alpha-\beta)$ 及 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

8. 求函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$ 的最小值和最大值.

例 4 求证：$\dfrac{\sin(2A+B)}{\sin A} - 2\cos(A+B) = \dfrac{\sin B}{\sin A}$.

分析 将等式中的角统一用 $A+B$ 及 A 来表示，以消除角的差异.

证明

$$\text{左边} = \frac{\sin[(A+B)+A] - 2\cos(A+B)\sin A}{\sin A}$$

$$= \frac{\sin(A+B)\cos A + \cos(A+B)\sin A - 2\cos(A+B)\sin A}{\sin A}$$

$$= \frac{\sin(A+B)\cos A - \cos(A+B)\sin A}{\sin A}$$

$$= \frac{\sin[(A+B)-A]}{\sin A} = \frac{\sin B}{\sin A} = \text{右边}.$$

所以等式成立.

通过角的变换消除角的差异，这是三角变换的重要思路之一.

例 5 求 $\dfrac{2\cos 10^\circ - \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$ 的值.

解
$$\text{原式} = \frac{2\cos(30^\circ - 20^\circ) - \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$$

$$= \frac{2(\cos 30^\circ \cos 20^\circ + \sin 30^\circ \sin 20^\circ) - \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$$

$$= \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ + \frac{1}{2}\sin 20^\circ\right) - \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$$

$$= \sqrt{3}.$$

将 10° 表示为 $30^\circ - 20^\circ$，从而将待求式的角统一用 20° 来表示.

例 6 已知 $\sin(\alpha+\beta) = \frac{2}{3}$，$\sin(\alpha-\beta) = -\frac{1}{5}$，求 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}$ 的值.

解 将已知条件按两角和(差)的正弦公式展开，得

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{2}{3},\\ \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{5},\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{5}}{2}=\dfrac{7}{30},\\ \cos\alpha\sin\beta=\dfrac{\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{5}}{2}=\dfrac{13}{30}.\end{cases}$$

从而得

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}=\frac{7}{30}\times\frac{30}{13}=\frac{7}{13}.$$

思　考

从例 6 的解题过程可以看出，只要知道 $\sin(\alpha+\beta)$，$\sin(\alpha-\beta)$ 的值，就可以求出 $\sin\alpha\cos\beta$，$\cos\alpha\sin\beta$. 据此你能推出用$\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$的正弦与余弦表示 $\sin\alpha\cos\beta$，$\cos\alpha\sin\beta$，$\sin\alpha\sin\beta$ 和$\cos\alpha\cos\beta$ 的式子吗？

练　习

1. 已知 α，β 都为锐角，$\sin\alpha=\dfrac{1}{7}$，$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$.

   (1) 试用 α 与$\alpha+\beta$表示角β；

   (2) 求 $\sin\beta$ 与 $\cos\beta$ 的值.

2. 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{2}$，$\cos\alpha-\cos\beta=\dfrac{1}{3}$，求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

习题 3.1(2)

感受・理解

1. 化简：

   (1) $\sin 14^\circ\cos 16^\circ+\sin 16^\circ\cos 14^\circ$；

   (2) $\sin 21^\circ\cos 81^\circ-\sin 69^\circ\cos 9^\circ$；

   (3) $\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta$；

   (4) $\cos(70^\circ+\alpha)\sin(170^\circ-\alpha)-\sin(70^\circ+\alpha)\cos(10^\circ+\alpha)$.

2. (1) 已知 $\sin\alpha=-\dfrac{15}{17}$，$\alpha\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$，求 $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)$的值；

   (2) 已知 $\cos\theta=\dfrac{5}{13}$，$\theta\in(\pi,2\pi)$，求 $\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 及 $\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值.

3. 已知 α，β 都是锐角，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{5}{13}$，求 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值.

4. 求下列函数的最大值和最小值：

(1) $y=\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$；

(2) $y=\sin x-\cos x$；

(3) $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$.

5. 求证：

(1) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$；

(2) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

6. 已知 $f(x)=\sin x$，求证：

(1) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\sin x\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)+\cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$；

(2) $\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}=\cos(x+h)\frac{\sin h}{h}$.

7. 用两种方法求 $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$ 的值.

8. 已知 $\sin(\alpha+\beta)=a$，$\sin(\alpha-\beta)=b$，求证：

(1) $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(a+b)$；　　(2) $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(a-b)$.

思考·运用

9. 已知 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，且 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{12}{13}$.

(1) 用 $\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$ 表示 2α；

(2) 求 $\cos 2\alpha$，$\sin 2\alpha$，$\tan 2\alpha$ 的值.

10. 已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\cos\beta=-\frac{1}{3}$，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{7}{9}$，求 $\sin\alpha$ 的值.

11. 在$\triangle ABC$中，

(1) 已知 $\cos A=\frac{4}{5}$，$\cos B=\frac{12}{13}$，求 $\cos C$；

(2) 已知 $\sin A=\frac{3}{5}$，$\cos B=\frac{5}{13}$，求 $\cos C$.

12. 设 α，β 都是锐角，

(1) 判断 $\sin(\alpha+\beta)$ 与 $\sin\alpha+\sin\beta$ 的大小，并说明理由；

(2) 判断 $\cos(\alpha+\beta)$ 与 $\cos\alpha+\cos\beta$ 的大小，并说明理由.

探究·拓展

13. 求下列函数的最大值和最小值：

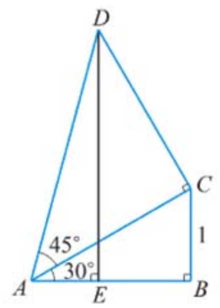
(1) $y=\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x$；

(2) $y=a\sin x+b\cos x$ (a，b 均为正数).

14. 如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle B$ 为直角，$DE\perp AB$ 于 E，$AC\perp DC$，设 $BC=1$.

(1) 若 $\angle BAC=30^\circ$，$\angle DAC=45^\circ$，试求 $\triangle ADE$ 的各边之长，由此推出 75° 的三角函数值；

(2) 设 $\angle BAC=\alpha$，$\angle DAC=\beta$（α，β，$\alpha+\beta$ 均为锐角），试由图推出求 $\sin(\alpha+\beta)$ 的公式.



（第 14 题）

阅 读

弦表与托勒密定理

托勒密所著《天文集》第一卷中载有弦表，并且讲述了制作弦表的原理. 该原理包括几个公式，其中之一就相当于

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

托勒密推导此公式时主要依据下面定理：圆内接四边形中，两条对角线的乘积等于两组对边乘积的和.

如图 3-1-4，设四边形 $ABCD$ 为圆 O 的内接四边形，且 AD 为圆 O 的直径，$AD=120$. 又设 $\angle AOB=\beta$，$\angle AOC=\alpha>\beta$，用 $\operatorname{crd}\theta$ 表示大小为 θ 的圆心角所对的弦的长度. 依据上面的定理，得

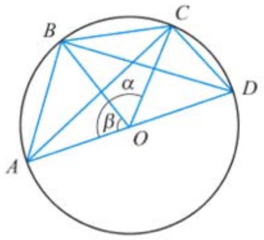


图 3-1-4

$$AD\cdot BC=AC\cdot BD-AB\cdot CD,$$

$$120\operatorname{crd}(\alpha-\beta)=\operatorname{crd}\alpha\cdot\operatorname{crd}(180^\circ-\beta)-\operatorname{crd}\beta\cdot\operatorname{crd}(180^\circ-\alpha),$$

这就是托勒密推导出来的公式. 我们运用公式

$$\operatorname{crd}\theta=120\sin\frac{\theta}{2},$$

得

$$120^2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=120^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{180^\circ-\beta}{2}-120^2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{180^\circ-\alpha}{2},$$

即 $$\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}.$$

将$\frac{\alpha}{2}$，$\frac{\beta}{2}$换成 α，β，即得

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

由于上述几何定理在托勒密制作弦表中起了重要作用，故被后人称为托勒密定理.

3.1.3 两角和与差的正切

● 回顾 3.1.1 小节例 2 中求 $\tan 15^\circ$的过程，我们先分别求出 $\sin 15^\circ$和 $\cos 15^\circ$，再由同角三角函数关系求出 $\tan 15^\circ$. 那么能否由 $\tan 45^\circ$和 $\tan 30^\circ$直接求出 $\tan 15^\circ$呢？

利用公式 $S_{(\alpha\pm\beta)}$ 和 $C_{(\alpha\pm\beta)}$，我们不难推出两角和与差的正切公式.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$$

所以,对使等式两边都有意义的 α 和 β,都有

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}, \qquad (T_{(\alpha+\beta)})$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}. \qquad (T_{(\alpha-\beta)})$$

$S_{(\alpha+\beta)}$, $C_{(\alpha+\beta)}$, $T_{(\alpha+\beta)}$ 都叫做和角公式, $S_{(\alpha-\beta)}$, $C_{(\alpha-\beta)}$, $T_{(\alpha-\beta)}$ 都叫做差角公式.

这就是两角和(差)的正切公式.

思　考

两角和与差的正切公式在结构上有什么特点?

例 1　已知 $\tan\alpha$,$\tan\beta$ 是方程 $x^2+5x-6=0$ 的两根,求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值.

分析　本题既可以根据方程解出 $\tan\alpha$, $\tan\beta$,再代入公式计算,也可以不解方程,通过计算 $\tan\alpha+\tan\beta$, $\tan\alpha\tan\beta$ 的值来求 $\tan(\alpha+\beta)$.

解法 1　解方程得

$$\tan\alpha=-6,\ \tan\beta=1,$$

(或 $\tan\alpha=1$, $\tan\beta=-6$)

代入两角和的正切公式,得

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-6+1}{1+6}=-\frac{5}{7}.$$

一般地,若 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 的两个根,则有 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

解法 2　因为 $\tan\alpha$, $\tan\beta$ 是方程 $x^2+5x-6=0$ 的两根,所以

$$\tan\alpha+\tan\beta=-5,\ \tan\alpha\tan\beta=-6.$$

因此,

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\frac{5}{7}.$$

例 2　求证:$\dfrac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}=\sqrt{3}$.

本题也可以由$\sqrt{3}$联想到 $\tan 60^\circ$,进而联想到两角和的正切公式,找到证明途径.

分析　由 $1=\tan 45^\circ$,等式左边的结构与 $\tan(\alpha+\beta)$ 相似,考虑运用两角和的正切公式.

证明　左边$=\dfrac{\tan 45^\circ+\tan 15^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 15^\circ}$

$$=\tan(45^\circ+15^\circ)$$

$$=\tan 60^\circ=\sqrt{3}.$$

例 3　如图 3-1-5,三个相同的正方形相接,求证:$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

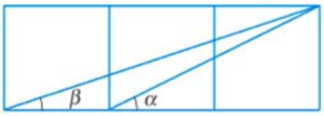


图 3-1-5

证明　如图 3-1-5，易知

$$\tan\alpha=\frac{1}{2},\ \tan\beta=\frac{1}{3},$$

且 $\alpha,\ \beta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1.$$

因为 $\alpha,\ \beta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha+\beta\in(0,\ \pi)$. 在区间 $(0,\ \pi)$ 内，正切值为 1 的角只有 1 个，即 $\tan\frac{\pi}{4}=1$. 所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

由 $\tan(\alpha+\beta)=1$ 能直接得到 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ 吗？为什么？

练　习

1. (1) 已知 $\tan\alpha=3$，求 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$；

(2) 已知 $\tan\alpha=-2$，$\tan\beta=5$，求 $\tan(\alpha+\beta)$.

2. 求下列各式的值：

(1) $\tan 75^\circ$；　(2) $\tan 15^\circ$；

(3) $\tan 105^\circ$；　(4) $\frac{1-\tan 75^\circ}{1+\tan 75^\circ}$.

3. 已知 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 是方程 $3x^2+5x-1=0$ 的两根，求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值.

4. 已知 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$，$\tan\alpha=-2$，求 $\tan\beta$ 的值.

5. 已知 $\tan\alpha=3$，$\tan\beta=2$，$\alpha,\ \beta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$. 求证：$\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$.

例 4　在斜三角形 ABC 中，求证：

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$$

分析　待证式与两角和(差)的正切公式比较，都含有正切的和与积，因此可考虑运用两角和的正切公式.

证明　在斜三角形 ABC 中，有 $A+B+C=\pi$，即 $A+B=\pi-C$，且 A，B，$A+B$ 都不等于 $\frac{\pi}{2}$. 所以有

$$\tan(A+B)=\tan(\pi-C),$$

即

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C,$$

即

$$\tan A+\tan B=-\tan C+\tan A\tan B\tan C,$$

所以

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$$

思　考

一般地，当角 A，B，C 满足什么条件时，能使等式 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$ 成立？

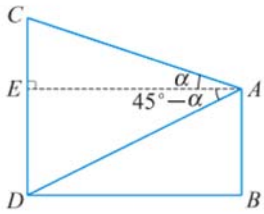


图 3－1－6

例 5　如图 3－1－6，两座建筑物 AB，CD 的高度分别是 9 m 和 15 m，从建筑物 AB 的顶部 A 看建筑物 CD 的张角 $\angle CAD=45°$，求建筑物 AB 和 CD 的底部之间的距离 BD.

分析　作 $AE\perp CD$ 于 E，有 $BD=AE$，设 AE 为 x，只需建立关于 x 的方程即可.

解　如图 3－1－6，作 $AE\perp CD$ 于 E.

因为 $AB\parallel CD$，$AB=9$，$CD=15$，

所以 $DE=9$，$EC=6$.

设 $AE=x$，$\angle CAE=\alpha$.

因为 $\angle CAD=45°$，所以 $\angle DAE=45°-\alpha$.

在 Rt△AEC 和 Rt△AED 中，有

$$\tan\alpha=\frac{6}{x},\ \tan(45°-\alpha)=\frac{9}{x}.$$

因为 $\tan(45°-\alpha)=\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$，

所以 $\dfrac{9}{x}=\dfrac{1-\dfrac{6}{x}}{1+\dfrac{6}{x}}$.

化简，得

$$x^2-15x-54=0,$$

解得　$x=18$，$x=-3$（舍去）.

答　两建筑物底部间的距离 BD 等于 18 m.

练　习

1. 已知在△ABC 中，$\tan A$，$\tan B$ 是方程 $3x^2-7x+2=0$ 的两根，求 $\tan C$ 的值.

2. 求证：$\tan 3\alpha-\tan 2\alpha-\tan\alpha=\tan 3\alpha\tan 2\alpha\tan\alpha$.

3. 求证：$\tan 95°-\tan 35°-\sqrt{3}=\sqrt{3}\tan 95°\tan 35°$.

4. 化简：$\dfrac{\tan 39°+\tan 81°+\tan 240°}{\tan 39°\tan 81°}$.

习题 3.1(3)

感受・理解

1. 化简：

(1) $\dfrac{\tan 58°+\tan 92°}{1+\tan 58°\tan 88°}$；　　(2) $\dfrac{\tan 2\theta-\tan\theta}{1+\tan 2\theta\tan\theta}$.

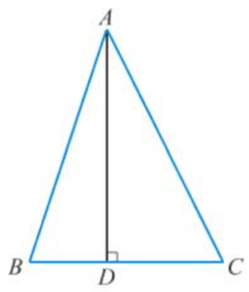
2. （1）已知 $\tan x=\dfrac{1}{7}$，$\tan y=-3$，求 $\tan(x-y)$ 的值；

（2）已知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\tan\beta=-2$，且 $0°<\alpha<90°$，$270°<\beta<360°$，求$\alpha+\beta$ 的值.

3. 证明：

（1）$\tan(x+y)\tan(x-y)=\dfrac{\tan^2 x-\tan^2 y}{1-\tan^2 x\tan^2 y}$；

（2）$\dfrac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}=\dfrac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}$.



（第 4 题）

4. 如图，在△ABC 中，$AD\perp BC$，垂足为 D，$BD:DC:AD=2:3:6$，求∠BAC 的度数.

5. 若 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{2}{5}$，$\tan\left(\beta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$，求 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$的值.

6. 在锐角三角形 ABC 中，$\sin A=\dfrac{3}{5}$，$\tan(A-B)=-\dfrac{1}{3}$，求 $\sin B$，$\cos C$ 的值.

思考·运用

7. 已知 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 是方程 $3x^2+5x-7=0$ 的两根，求下列各式的值：

（1）$\tan(\alpha+\beta)$；

（2）$\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$；

（3）$\cos^2(\alpha+\beta)$.

8. （1）若 $\alpha+\beta=45°$，求证：$(\tan\alpha+1)(\tan\beta+1)=2$；

（2）若 $(\tan\alpha+1)(\tan\beta+1)=2$，求 $\alpha+\beta$ 的值.

9. 若 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，且 $\tan\alpha=\dfrac{1}{7}$，$\tan\beta=\dfrac{3}{4}$，

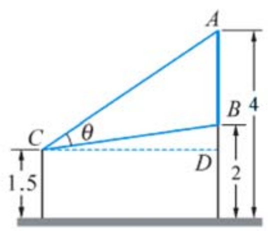
求证：$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

探究·拓展

10. 已知两条直线 l_1，l_2 的斜率分别为 k_1，$k_2(0<k_1<k_2)$，设 l_1，l_2 的夹角（锐角）为 θ.

（1）求证：$\tan\theta=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$；

（2）求直线 $2x-y+1=0$ 与直线 $x-3y-3=0$ 的夹角 θ.



（第 11 题）

11. 如图，有一壁画，最高点 A 处离地面 4 m，最低点 B 处离地面 2 m，若从离地高 1.5 m 的 C 处观赏它，则离墙多远时，视角 θ 最大？

3.2 二倍角的三角函数

我们已经知道函数 $y=\sin x$ 与 $y=\sin 2x$ 图象之间的位置关系（图 3 - 2 - 1）.

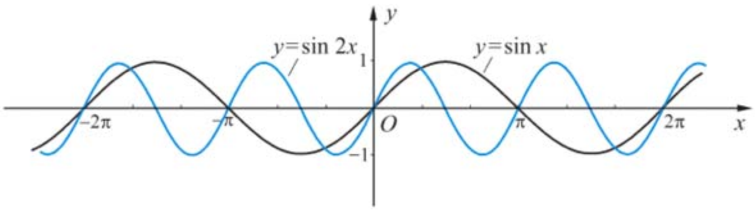


图 3 - 2 - 1

一般地，

● 角 α 的三角函数与角 2α 的三角函数之间有怎样的关系？

事实上，只要在 $S_{(\alpha+\beta)}$，$C_{(\alpha+\beta)}$，$T_{(\alpha+\beta)}$ 公式中，令 $\beta=\alpha$，就可以得到下面的结果：

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad (S_{2\alpha})$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha, \qquad (C_{2\alpha})$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}. \qquad (T_{2\alpha})$$

其中，公式 $C_{2\alpha}$ 还可以变形为

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1, \qquad (C_{2\alpha})$$

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha. \qquad (C_{2\alpha})$$

以上这些公式都叫做**倍角公式**. 倍角公式是和角公式的特例.

这里的“倍角”，实际上专指“二倍角”，遇到“三倍角”等名称时，“三”字等不能省去.

有了倍角公式，就可以用角 α 的三角函数表示二倍角 2α 的三角函数.

例 1 已知 $\sin\alpha=\frac{12}{13}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$ 的值.

解 因为 $\sin\alpha=\frac{12}{13}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

$$所以\ \cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=-\frac{5}{13}.$$

$$于是，\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{12}{13}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)=-\frac{120}{169},$$

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\cdot\left(\frac{12}{13}\right)^2=-\frac{119}{169},$$

$$\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=-\frac{120}{169}\cdot\left(-\frac{169}{119}\right)=\frac{120}{119}.$$

例 2 求证：$\dfrac{1+\sin 2\theta-\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta+\cos 2\theta}=\tan\theta$.

分析 等式左端较繁，故对左边化简. 并注意将 2θ 的三角函数化成 θ 的三角函数.

证明 左边$=\dfrac{1+2\sin\theta\cos\theta-(1-2\sin^2\theta)}{1+2\sin\theta\cos\theta+(2\cos^2\theta-1)}$

$$=\frac{2\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)}{2\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta)}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\tan\theta=右边,$$

所以原式成立.

练 习

1. 利用倍角公式求下列各式的值：

(1) $\sin 112°30'\cos 67°30'$； (2) $\cos^2\dfrac{\pi}{8}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}$；

(3) $1-2\sin^2 15°$； (4) $\dfrac{2\tan 22.5°}{1-\tan^2 22.5°}$.

2. 已知 $\sin\alpha=0.8$，$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$ 的值.

3. 已知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，求 $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+2\alpha\right)$的值.

4. 证明：

(1) $2\sin(\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha)=\sin 2\alpha$； (2) $1+2\cos^2\theta-\cos 2\theta=2$；

(3) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin\alpha}=2\sin\alpha$； (4) $\dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\tan^2 A$.

思 考

在一个圆的所有内接矩形中，怎样的矩形面积最大？

例 3 化简 $\sin^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)-\sin^2\alpha$.

解法 1 由倍角公式 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$，得

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

公式

$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$，

$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$，

$\tan^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

都可由倍角公式变形得到，亦称为降幂公式.

于是 原式 $=\dfrac{1-\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)}{2}+\dfrac{1-\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)}{2}-\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\cos 2\alpha\right]$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(2\cos 2\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2\alpha\right)$$

$$=\frac{1}{2}.$$

解法 2 $\sin^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)-\sin^2\alpha$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha\right)^2-\sin^2\alpha$$

$$=\frac{3}{2}\sin^2\alpha+\frac{1}{2}\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{1}{2}.$$

例 4 求证：$\sin 50^\circ(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ)=1$.

证明 左边 $=\sin 50^\circ\left(1+\dfrac{\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}\right)$

$$=\sin 50^\circ\,\frac{\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$=2\sin 50^\circ\,\frac{\dfrac{1}{2}\cos 10^\circ+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$=2\sin 50^\circ\,\frac{\cos(60^\circ-10^\circ)}{\cos 10^\circ}=\frac{2\sin 50^\circ\cos 50^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$=\frac{\sin 100^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}=1=\text{右边},$$

所以原式成立.

例 5 在半圆形钢板上截取一块矩形材料，怎样截取能使这个矩形的面积最大？

解 如图 3-2-2，设 $\angle AOB=\theta$，且 θ 为锐角，半圆的半径为 R，则面积最大的矩形 $ABCD$ 必内接于半圆 O，且两边长分别为

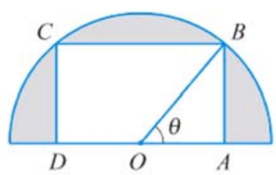


图 3-2-2

$$AB=R\sin\theta,$$
$$DA=2OA=2R\cos\theta.$$

这个矩形的面积为

$$S_{\text{矩形}ABCD}=AB\cdot DA=R\sin\theta\cdot 2R\cos\theta=R^2\sin 2\theta.$$

所以，当 $\sin 2\theta=1$（θ 为锐角），即 $\theta=45^\circ$ 时，矩形 $ABCD$ 的面积取得最大值 R^2.

答　当这个矩形的两边长与半圆的半径的比是 $1:2:\sqrt{2}$ 时，所截矩形的面积最大.

练　习

1. 化简：

（1）$(\sin 15^\circ+\cos 15^\circ)^2$；　　（2）$\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$；

（3）$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$；　　（4）$\sqrt{2+\cos 20^\circ-\sin^2 10^\circ}$；

（5）$\dfrac{1}{1-\tan\theta}-\dfrac{1}{1+\tan\theta}$.

2. 证明：

（1）$\cos^2(A+B)-\sin^2(A-B)=\cos 2A\cos 2B$；

（2）$\cos^2\theta(1-\tan^2\theta)=\cos 2\theta$.

3. 已知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{7}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$，且 α，β 都是锐角，求 $\alpha+2\beta$ 的值.

习题 3.2

感受・理解

1. 求下列各式的值：

（1）$\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8}$；　　（2）$\sin^2 15^\circ-\cos^2 15^\circ$；

（3）$\sin^2\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{1}{2}$；　　（4）$1-2\cos^2 750^\circ$；

（5）$\sin 15^\circ\cos 15^\circ$.

2. 化简：

（1）$\sin^2\dfrac{\pi}{16}-\cos^2\dfrac{\pi}{16}$；　　（2）$\dfrac{2\tan 22.5^\circ}{1-\tan^2 22.5^\circ}$；

（3）$\dfrac{\tan\dfrac{5\pi}{24}}{1-\tan^2\dfrac{5\pi}{24}}$；　　（4）$\dfrac{\sin 15^\circ-\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ+\cos 15^\circ}$.

3. 已知 $\cos\varphi=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，且 $180^\circ<\varphi<270^\circ$，求 $\sin 2\varphi$，$\cos 2\varphi$，$\tan 2\varphi$ 的值.

4. 已知 $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3}{5}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{4}{5}$，试确定角 α 所在的象限.

5. （1）已知 $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，求 $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$ 的值；

（2）已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，求 $\sin 2\alpha$ 的值；

（3）已知 $\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$，化简 $\sqrt{1-\sin\alpha}+\sqrt{1+\sin\alpha}$；

（4）已知 $\tan\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$，$\tan\left(\beta-\dfrac{\alpha}{2}\right)=-\dfrac{1}{3}$，求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值.

6. 求证：

(1) $\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=1-\sin\alpha$；

(2) $\tan\theta-\frac{1}{\tan\theta}=-\frac{2}{\tan 2\theta}$；

(3) $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)=2\tan 2\alpha$；

(4) $\sin\theta(1+\cos 2\theta)=\sin 2\theta\cos\theta$.

思考·运用

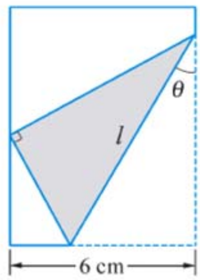
7. 用 $\sin\alpha$ 表示 $\sin 3\alpha$.

8. 求值：$\sin 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ$.

9. 已知 $\sin\beta=m\sin(2\alpha+\beta)$，且 $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，$\alpha\neq\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，$m\neq 1$.

求证：$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1+m}{1-m}\tan\alpha$.

10. 如图，将矩形纸片的右下角折起，使得该角的顶点落在矩形的左边上，那么 l 的长度取决于角 θ 的大小. 探求 l，θ 之间的关系式，并导出用 θ 表示 l 的函数表达式.

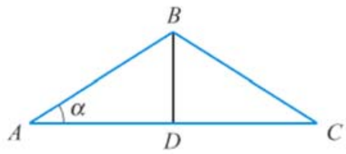


(第 10 题)

探究·拓展

11. 试说明 $y=\sin 2x$ 与 $y=\sin^2 x$ 的图象之间有什么样的关系.

12. 如图，屋顶的断面图是等腰三角形 ABC，其中 $AB=BC$，横梁 AC 的长为定值 $2l$. 试问：当屋顶面的倾斜角 α 为多大时，雨水从屋顶(顶面为光滑斜面)上流下所需的时间最短？



(第 12 题)

链　接

正弦函数与余弦函数的叠加

在第 1 章里，通过对函数图象的考察，我们已经知道，函数 $g(x)=a\sin(x+\theta)$ 和 $f(x)=a\sin x\ (a\neq 0)$ 具有相同的周期和振幅. 在学习了和角公式以后，我们可以对它们的关系作进一步的研究.

若将 $g(x)=a\sin(x+\theta)$ 依和角公式展开，有

$$g(x)=A\sin x+B\cos x,$$

其中 $A=a\cos\theta$，$B=a\sin\theta$，且 $A^2+B^2=a^2\neq 0$.

一般地，我们把周期相同的正弦函数与余弦函数的和 $f(x)=A\sin x+B\cos x$(其中实数 A，B 不全为 0) 称为正弦函数与余弦函数的叠加.

容易看出，形如 $a\sin(x+\theta)$ 或 $a\cos(x+\theta)$ 的函数都是正弦函数与余弦函数的叠加. 反过来，是不是所有的正弦函数与余弦函数的叠加都可以化成 $a\sin(x+\theta)$ 或 $a\cos(x+\theta)$ 的形式呢？

在本章开始时，我们曾研究过一个简单的例子：

$$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

回到一般的情形，将函数

$$f(x)=A\sin x+B\cos x\quad(A^2+B^2\neq 0)$$

改写为

$$f(x)=\sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x\right).$$

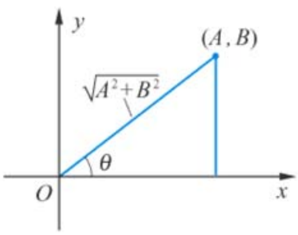


图 3－2－3

因 $\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 与 $\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 的平方和是 1，故如图 3－2－3，存在角 $\theta\in[0, 2\pi)$，使得

$$\cos\theta=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \sin\theta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

因此

$$f(x)=\sqrt{A^2+B^2}(\cos\theta\sin x+\sin\theta\cos x)=\sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\theta).$$

由此可见，任意的正弦函数与余弦函数的叠加函数 $f(x)$ 都可以化成 $a\sin(x+\theta)$ 或 $a\cos(x+\theta)$ 的形式，而且周期不变.

上面的结论在物理学中有广泛的应用. 例如，两个同频率的正弦交流电相加，得到的是一个同频率的正弦交流电. 利用该结论，我们也可以解释声波的共振现象.

(1) 你能求出函数 $f(x)=\sqrt{2}\cos x+2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的振幅和周期吗？

(2) 矩形 $ABCD$ 所在平面与地面垂直，A 点在地面上，$AB=a$，$BC=b$，AB 与地面成 θ 角（如图 3－2－4 所示），若记点 C 到地面的距离为 h，试用 θ 的函数表示 h，并求出 h 的最大值.

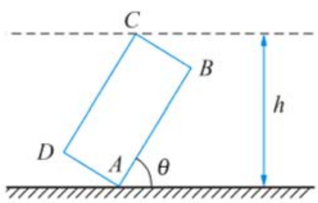


图 3－2－4

3.3 几个三角恒等式

在引入对数概念以后，我们还研究了它的运算，并得到了一些重要的结论，如

$$\log_a m+\log_a n=\log_a(mn).$$

同样，在定义了三角函数以后，我们也应该考虑它的运算，如

$$\sin\alpha+\sin\beta=?$$

观察和角公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

容易得到

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta. \qquad ①$$

由此，有

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)].$$

①的左边已经是两个正弦的和. 因此，只要进行简单的变形，就可以回答 $\sin\alpha+\sin\beta=?$ 这个问题.

令 $\alpha+\beta=\theta$，$\alpha-\beta=\varphi$，代入 ① 得

$$\sin\theta+\sin\varphi=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2},$$

从而有

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad ②$$

你还能发现其他类似的恒等式吗？

链　接

万 能 代 换

先看一个具体的问题.

设 $\tan\frac{\alpha}{2}=t$.

(1) 求证：$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$\tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2}$； ①

(2) 当 $t=2$ 时，利用以上结果求 $3\cos^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\alpha+\sin^2\frac{\alpha}{2}$ 的值.

证明 (1) 由二倍角公式,得

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2t}{1-t^2}.$$

再由同角三角函数间的关系,得

$$\cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}=\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1-t^2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

(2) $3\cos^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\alpha+\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$$=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+1-2\sin\alpha=2+\cos\alpha-2\sin\alpha$$

$$=2+\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{4t}{1+t^2}=\frac{3+t^2-4t}{1+t^2}=-\frac{1}{5}.$$

公式①称为万能代换公式,利用万能代换公式,可以用 $\tan\frac{\alpha}{2}$ 的有理式统一表示 α 角的任何三角函数值. 图 3-3-1 中的直角三角形可以帮助你更好地理解万能代换公式.

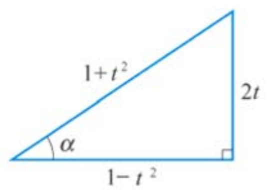


图 3-3-1

思 考

如何用万能代换公式解决下面的问题:

(1) 证明: $\dfrac{\sin\alpha+1}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{1}{2}$;

(2) 已知 $\tan\theta=\dfrac{b}{a}$, 求证: $a\cos 2\theta+b\sin 2\theta=a$.

练 习

1. 证明下列积化和差公式:

(1) $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$;

(2) $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$;

(3) $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$;

(4) $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$.

2. 证明下列和差化积公式：

(1) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

(2) $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;

(3) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

(4) $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

3. (1) 证明半角公式：

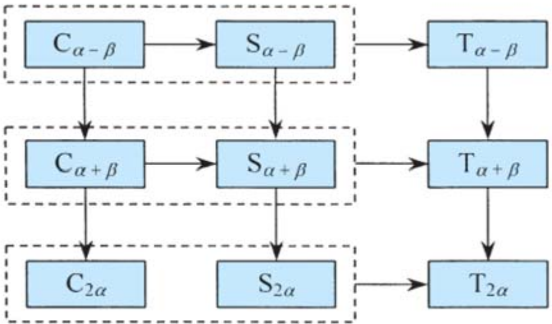
$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

(2) 已知 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$，且 $180^\circ<\theta<270^\circ$，试求 $\sin\frac{\theta}{2}$ 和 $\cos\frac{\theta}{2}$ 的值.

本章回顾

本章我们重点学习了两组三角恒等式：和角公式，倍角公式，并以它们为工具，研究了有关三角函数式的化简、计算、恒等式的证明等有关三角变换的问题.



在本章的学习中，化归的数学思想和方法被多次运用，其中，既有从已知到未知的化归（如由余弦的差角公式，推出其余的和（差）角公式），也有从一般到特殊的化归（如从和角公式推出倍角公式）. 有了化归思想，就可以理解三角恒等式推导和变形的思路.

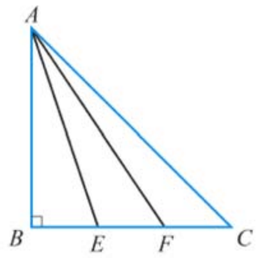
复 习 题

感受 · 理解

1. (1) 已知 $\cos 2\alpha=\dfrac{3}{5}$,求 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$ 的值;

(2) 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$,求 $\sin 2\theta$ 的值.

2. 如图,在等腰直角三角形 ABC 中,$\angle B=90^\circ$,E,F 将 BC 三等分,求 $\angle EAF$,$\angle FAC$ 的正切值.



(第 2 题)

3. 已知等腰三角形 ABC 的腰长为底边长的 2 倍,求顶角 A 的正弦、余弦和正切的值.

4. 化简:

(1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$;

(2) $\cos A+\cos(120^\circ-A)+\cos(120^\circ+A)$;

(3) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

5. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$,$\alpha$ 是第二象限角,且 $\tan(\alpha+\beta)=1$,求 $\tan\beta$ 的值.

6. 求值:$\dfrac{\sin 15^\circ\cos 5^\circ-\sin 20^\circ}{\cos 15^\circ\cos 5^\circ-\cos 20^\circ}$.

7. 求下列各函数的周期和值域:

(1) $y=\sin x\cos x$; (2) $y=\sqrt{3}\cos x+\sin x$.

8. 已知电流 $I=I_m\sin\omega t$,电压 $V=V_m\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)$,求证:电功率

$$P=\frac{1}{2}V_mI_m\sin 2\omega t.$$

思考 · 运用

9. 证明:

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

10. 在△ABC 中,

(1) 求证:$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}=1$;

(2) 已知 $\tan A+\tan B+\tan A\tan B=1$,求角 C 的度数.

11. 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=a$,$\cos\alpha+\cos\beta=b$,求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

12. 已知 $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=m-1$,求实数 m 的取值范围.

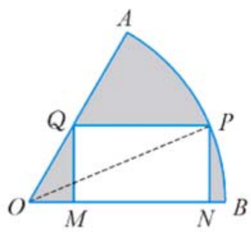
13. 已知函数 $y=\sin^2x+2\sin x\cos x-3\cos^2x$,$x\in\mathbf{R}$.

(1) 求函数的最小正周期;

(2) 求函数的最大值.

探究 · 拓展

14. 如图,在半径为 R、圆心角为 60°的扇形 AB 弧上任取一点 P,作扇形的内接矩形 $PNMQ$,使点 Q 在 OA 上,点 M,N 在 OB 上,求这个矩形面积的最大值及



(第 14 题)

相应的$\angle AOP$的值.

15. (1) 探求 $(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 44^\circ)$ 的值；

(2) 求值：$(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 2^\circ)(1+\tan 3^\circ)\cdots(1+\tan 44^\circ)(1+\tan 45^\circ)$.

16. (阅读题)由倍角公式 $\cos 2x=2\cos^2 x-1$，可知 $\cos 2x$ 可以表示为 $\cos x$ 的二次多项式. 对于 $\cos 3x$，我们有

$$\begin{aligned}\cos 3x=\cos(2x+x)&=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x\\&=(2\cos^2 x-1)\cos x-2(\sin x\cos x)\sin x\\&=2\cos^3 x-\cos x-2(1-\cos^2 x)\cos x\\&=4\cos^3 x-3\cos x.\end{aligned}$$

可见 $\cos 3x$ 可以表示为 $\cos x$ 的三次多项式.

一般地，存在一个 n 次多项式 $P_n(t)$，使得 $\cos nx=P_n(\cos x)$，这些多项式$P_n(t)$ 称为切比雪夫(P. L. Tschebyscheff) 多项式. 请尝试求出 $P_4(t)$，即用一个 $\cos x$ 的四次多项式来表示 $\cos 4x$.

利用结论

$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x,$$

求出 $\sin 18^\circ$ 的值.

(提示：$3\times 18^\circ=90^\circ-2\times 18^\circ$)

计算器使用范例

◆ 范例 1：小数位数/有效位数

(1) 200 ÷ 7 × 14 = 400

200 [÷] 7 [×] 14 [=] | 400 |

（指定3位小数）[MODE][MODE][MODE] [1] [3]

| 400.000 |

(2) 2 ÷ 7，以 3 位有效位数（SCI3）显示计算结果.

[MODE][MODE][MODE] [2] [3]

2 [÷] 7 [=] | 2.86^{-01} |

注：若要恢复请按 [MODE][MODE][MODE] [3] [1]

◆ 范例 2：利用变数进行计算

已知方程 $3.2x^2-9.2x+4.7=0$，试根据公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

求解方程.

3.2 [SHIFT] [STO] [A] [(−)] 9.2 [STO] [SHIFT] [B]

4.7 [SHIFT] [STO] [C] [AC] [ALPHA]

[B] [X^2] [−] 4 [ALPHA] [A] [ALPHA]

[C] [SHIFT] [STO] [D] [AC] [(] [(−)] [ALPHA]

[B] [+] [√] [ALPHA] [D] [)] [÷]

[(] [2] [ALPHA] [A] [)]

[=] | 2.210582305 |

按[◀]键直到[B]与[√]之间，即[+]下方，改为[−]

[=] | 0.664417695 |

◆ 范例 3：统计计算

考察某学校学生上课迟到的情况，该学校 2 308 个学生半年上课迟到次数列表如下，求总体平均数、方差.

迟到次数	0	1	2	3	4	5
人　　数	557	503	483	375	232	158

解：按 [MODE] [2] （进入统计状态）

[SHIFT] [CLR] [1] (Scl)（消除存储器内容）

[AC] 0 [SHIFT] [;] 557 [DT] 1 [SHIFT] [;] 503 [DT]

2 [SHIFT] [;] 483 [DT] 3 [SHIFT] [;] 375 [DT]

4 [SHIFT] [;] 232 [DT] 5 [SHIFT] [;] 158 [DT]

[SHIFT] [S-VAR] [1] ($\bar{x}$) [=] | $\bar{x}$ 1.868284229 |

[SHIFT] [S-VAR] [2] (Xσn) [=] | Xσn 1.531862405 |

[X^2] [=] | Ans^2 2.346602429 |

说　　明

江苏教育出版社出版的《普通高中课程标准实验教科书·数学》是根据 2003 年教育部制订的《普通高中数学课程标准(实验)》编写的.

该套教科书充分体现数学课程标准的基本理念,使学生通过高中阶段的学习,能获得适应现代生活和未来发展所必需的数学素养,满足他们个人发展与社会进步的需要.

教科书力图使学生在丰富的、现实的、与他们经验紧密联系的背景中感受数学、建立数学、运用数学,做到“入口浅,寓意深”. 通过创设恰当的问题情境,引导学生进行操作、观察、探究和运用等活动,感悟并获得数学知识与思想方法. 在知识的发生、发展与运用过程中,培养学生的思维能力、创新意识和应用意识.

教科书按知识发展、背景问题、思想方法三条主线,通过问题将全书贯通. 每个模块围绕中心教育目标展开,每章围绕核心概念或原理展开. 教科书充分关注数学与自然、生活、科技、文化、各门学科的联系,让学生感受到数学与外部世界是息息相通、紧密相连的.

教科书充分考虑学生的不同需求,为所有学生的发展提供帮助,为学生的不同发展提供较大的选择空间. 整个教科书设计为:一个核心(基本教学要求),多个层次,多种选择. 学好核心内容后,根据需要,学生有多种选择,每一个人都能获得必备的数学素养与最佳发展.

众多的数学家、心理学家、学科教育专家、特级教师参加了本套教科书的编写工作. 参与本册讨论与审稿的专家与教师有:葛军、陈跃辉、石志群、董林伟、冯惠愚、陆云泉、于明、孙旭东、张松年、尤善培、夏建国、费仁允、周凯、朱建明等,在此向他们深表感谢!

本书编写组

2005 年 6 月